# ABSTRAÇÃO

## UM CAMINHO POSSÍVEL PARA ENTENDER MATEMÁTICA

EUDES MENDES BARBOZA
ISLANITA CECÍLIA ALCANTARA DE ALBUQUERQUE LIMA

EDUPE

**Eudes Mendes Barboza**
**Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque Lima**

# ABSTRAÇÃO:

um caminho possível para entender matemática

UPE – ADUPE
**Recife, 2016**

**Abstração: Um caminho possível para entender matemática**

Eudes Mendes Barboza
Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque Lima

1ª Edição
Abril de 2016

Catalogação na publicação elaborada pela Bibliotecária
Neide Maria Jardinette Zaninelli / CRB-9/884.

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

B238a Barboza, Eudes Mendes
Abstração: um caminho possível para entender matemática [recurso eletrônico] / Eudes Mendes Barboza e Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque Lima. – Recife: EDUPE, 2016.
88 p.: il.

world wide web: <www.edupe.upe.br>

ISBN 978-85-7856-171-0

1. Educação. 2. Matemática. 3. Análise funcional. 4. Geometria. I. Lima, Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque. II. Título.

CDU: 517.98

Dedicamos à coisa mais linda:
Maria Inês!

Ao infinito...e além!

# Lista de Ilustrações

# Prefácio

Este livro é produto de reflexões a respeito da Educação Superior em Matemática nas quais buscamos entender como ocorre o processo de acomodação de conteúdos matemáticos desde os mais próximos da realidade concreta aos mais abstratos. Inicialmente testamos alguns conteúdos ministrados em minicursos para alunos de licenciatura em Matemática. Essas experiências nos ajudaram a maturar algumas ideias melhorando a forma do repassse de conteúdos. Enfatizamos que este é um livro destinado a leitura extra-curricular, pois buscamos não apenas expor algums conceitos, como também buscamos apresentá-los de forma que o leitor perceba a relação crescente de abstração que os envolve.

# Agradecimentos

Agradecemos

às nossas mães: Nadjane e Lourdes;

aos nossos familiares;

aos companheiros: Ignaldo e Wagner;

aos amigos;

aos alunos.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

O ser humano tenta compreender o que acontece ao seu redor através de observações. Além disso, organiza suas ideias em estruturas conceituais, que denominaremos de modelos mentais. Quando a estes se aplica a lógica, origina-se uma teoria. Seguindo esse raciocínio, os modelos matemáticos possuem uma coerência e produzem amplas teorias.

Enfocando a Matemática, percebemos que desde a antiguidade se discute como ocorre a construção do seu pensamento. Platão defendia que os entes matemáticos já existem independente do homem e caberia ao matemático descobri-los. Já Aristóteles afirmava que a matemática é criação da mente humana, que baseada na realidade concreta, origina modelos que aos poucos vão se distanciando dessa concretude e ganhando caráter mais abstrato, muitas vezes, se tornando bastante distintos do modelo inicial.

Apesar de não haver um consenso de qual dessas duas visões é a mais precisa, notamos que atualmente há uma preocupação no processo de ensino-aprendizagem em matemática de se assumir a postura defendida por Aristóteles, pois seguindo essa linha de raciocínio, o conhecimento matemático se origina das experiências sensíveis do ser humano, e pouco a pouco, atinge níveis de abstração, mas mantém contatos com suas referências concretas, em outras palavras: parte-se de um conhecimento prévio, geralmente adquirido de uma forma mais concreta, para se construir um conhecimento mais elaborado.

Esse tipo de perspectiva é bastante atual como Rêgo (2009, p.40) corrobora:

> "As novas demandas sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica do aluno. Para tanto, faz-se necessário a introdução da aprendizagem de novos conteúdos de conhecimentos e de metodologias que (...) reconheça, identifique e considera seus conhecimentos prévios como ponto de partida e o prepare para realizar-ser."

No entanto, sabemos que, a cada mudança de nível escolar, os conteúdos matemáticos vão se distanciando da realidade concreta e se tornando cada vez mais abstratos. Dessa forma, ao se estudar matemática no Educação Superior, a abstração se torna uma característica intrínseca dos conteúdos relativos às componentes curriculares cursadas, e é importante que os futuros profissionais que atuarão nessa área, tanto como professores do Educação Básica quanto do Superior, tenham consciência de que o aprender e o fazer matemático se constituem em processos bastante complexos e que na maioria das vezes, para se obter êxito nessas atividades é necessário galgar diversos níveis de abstração matemática, geralmente partindo-se do mais concreto, onde a visualização é uma fonte importante da sua assimilação, até conteúdos bastante abstratos, onde a intuição, aliada ao raciocínio lógico-dedutivo, torna-se um elemento indispensável para a compreensão dos conceitos e resultados mais abstratos.

Assim, percebemos que a construção do pensamento matemático desde seus primórdios é baseada, a princípio, em observações empíricas e que gradativamente vão se afastando da realidade e atingindo níveis de abstração cada vez maiores. Esta gradação pode ser observada, por exemplo, quando analisamos a evolução do conceito de número, que surgiu de maneira bastante rudimentar, ainda na pré-História, e atingiu níveis gradativos de abstração até chegar nos atuais números reais e complexos.

Isto ainda pode ser verificado nos dias atuais, quando, por exemplo, estamos trabalhando na Pré-Escola, percebemos que os números naturais são apresentados aos educandos e representados por eles de forma bastante concreta, através de conjunto de tampas, lápis, etc. Por exemplo, quando se pergunta a uma criança qual a sua idade, geralmente, ela responde mostrando os dedos. Nesta fase, ela ainda não consegue relacionar a quantidade representada pelos dedos, nem mesmo com a palavra que expressa essa quantidade. Posteriormente, a resposta a essa mesma pergunta vem em forma oral. Nesta época, a criança já, provavelmente, encontra-se em nível cognitivo que lhe permite representar simbolicamente um número natural, constituindo uma primeira forma de abstração de conceitos matemáticos.

Outro bom exemplo para este fato, ocorre com a geometria que foi sistematizada por Euclides ainda no século V a.C., onde todos os conceitos tinham modelos empíricos nos quais se concretizavam e posteriormente, no século XIX, foram criadas outras geometrias que, a princípio, não eram modeladas empiricamente.

Atualmente, esta evolução do pensamento pode ser acompanhada pelos conteúdos matemáticos que são apresentados em sala de aula, seja em escolas do Educação Básica ou em aulas do Ensino Superior, onde para passar de um nível mais concreto para outro mais abstrato, é necessário a utilização do conhecimento prévio, ou seja, para se chegar a compreender um conceito abstrato faz-se necessário o uso de conhecimentos mais simples que constituem modelos mais próximos da realidade concreta.

No Educação Superior de Matemática esse fato se repete, evidentemente com níveis de abstração cada vez maiores. Por explepl0, quando introduzimos a linguagem dos cálculos diferenciais e integrais. No estudo dos limites, por exemplo, falamos sucessivamente em valores muito grandes ou valores insignificantemente pequenos, mas não conseguimos representa-los numericamente, então nos utilizamos da ideia de infinito para tentar concretizar uma noção matemática que cresce ou decresce indefinidamente, como veremos com mais detalhes no capítulo dois. Como também os conceitos de derivadas vão se sofisticando, passando da reta a espaços euclidianos com dimensões maiores, saindo de uma noção intuitiva de velocidade para abranger o conceito de transformação linear que é bastante abstrata. Podemos encontrar esta gradação de níveis de abstração em generalizações de teoremas, como por exemplo, teorema de Stone-Weierstrass -

demonstrado em 1937, por Marshall Harvey Stone - o qual é uma generalização do famoso teorema aproximação de Weierstrass - provado em 1885, por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass.

Fatos como esse se repetem em toda a vida escolar de um individuo, já que os conteúdos são organizados a partir dos mais simples para o mais complexos. Dessa forma questionamos: como o pensamento matemático, apresentado sobre a forma de conteúdos progride, geralmente, de um nível próximo da realidade empírica (concreta) para uma realidade abstrata?

Acreditamos que uma visão de como se procede a gradação do concreto ao abstrato do pensamento matemático, através de conteúdos do Ensino Superior, pode servir de modelo para conteúdos mais simples do Ensino Médio, Fundamental e até mesmo da Educação Infantil. Já que os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997,p.22) defendem que *"abstração, precisão, rigor lógico, caráter irrefutável de suas conclusões, bem como o extenso campo de suas aplicações"* são as principais características que devem ser trabalhadas no processo de ensino-aprendizagem da matemática em qualquer nível de ensino.

## 1.1 A concepção construtivista aplicada à Matemática

Esta ideia de que a aprendizagem se desenvolve em diversos estágios não é recente. Já no século XIX, Montessori defendia que a aprendizagem ocorre de maneira diferentes em três períodos, que gradualmente vão englobando conhecimentos mais abstratos:

- $1^0$ **Período**(Do nascimento aos 6 anos.)
  Esta etapa é essencialmente sensorial, assim a aquisição de conhecimento ocorre por meio da exploração e da absorção do meio que circunda o indivíduo;
- $2^0$ **Período**(Dos 6 aos 12 anos.)
  Nesta faixa etária, a criança já é capaz de abstrair, passando a relacionar os fatos;
- $3^0$ **Período**( A partir dos 12.)
  Neste período o jovem se interessa pelo mundo e é despertado para o problema das causas e efeitos.

Vemos com essa divisão que a construção do conhecimento parte de um nível sensorial, ou seja, baseia-se na experiência empírica onde os sentidos são as principais referências para a compreensão da realidade que circunda cada indivíduo, passa por período intermediário, onde já se busca saber os relações entre os objetos e a realidade, e finalmente atinge o nível se distância da percepção sensorial sem, no entanto, perder o contato com ela.

A base montessoriana foi uma fonte para Piaget desenvolver sua concepção construtivista da aprendizagem, que defende que o indivíduo é protagonista da aquisição do conhecimento. Dessa maneira, *conhecer*, significar atuar sobre a realidade na qual estamos imersos. No entanto, de acordo Salvador(2000, p.250),

> atuar no sentido piagetiano não se pode traduzir necessariamente por ações e movimentos visíveis. esse poderia ser o caso das crianças pequenas, que, de alguma maneira, necessitam manipular a realidade que as envolve para poder entendê-la. Na maioria dos casos,porém, essa atividade é interna, mental, ainda que possa basear em objetos físicos. Um sujeito pode estar mentalmente muito ativo sem que por isso tenha de mover ou manipular objetos: quando compara, ordena, classifica conta ou faz deduções mentais.

Obviamente, as ideias piagetianas podem e devem ser aplicadas nos mais diversos contextos educativos. Particularmente, quando trabalhamos com a aprendizagem do conhecimento matemático, notamos que Piaget serve para justificar como se processa a gradação de níveis de abstração, visto que em tese os conteúdos são organizados de maneira a facilitar a aprendizagem.

Na Matemática, principalmente, ao se estudar conteúdos mais avançados, pode-se basear em uma realidade não necessariamente concreta, mas em uma realidade matemática internalizada, ou seja, construída/adquirida pelo indivíduo a partir de sua proximidade com os conceitos de uma certa teoria matemática. Dessa forma, se aprende a partir de conhecimentos prévios. Isto é justamente o que prega a teoria construtivista, pois de acordo com Miras (1996, p. 58),

> As mentes de nossos alunos estão bem longe de parecerem limpas, e a concepção construtivista assume esse fato como um elemento central na explicação dos processos de aprendizagem e ensino na sala de aula. Do ponto de vistar desta concepção aprender qualquer um dos conteúdos escolares pressupõe atribuir um sentido e construir os significados implicados em tal conteúdo. Pois bem, essa concepção não é efetuada a partir do zero, nem mesmo nos momentos iniciais da escolaridade. O aluno constrói pessoalmente um significado (ou o reconstrói do ponto de vista social) com base nos significados que pôde construir previamente. Justamente graças a esta base é possível continuar aprendendo, continuar construindo novos significados."

Essa base inicial para assimilação de um conteúdo é o que denominamos de conhecimento prévio e torna-se indispensável para a efetivação da aprendizagem. Na Matemática, o conhecimento prévio é um elemento primordial para que se avance no conhecimento. Por exemplo, ao se estudar Análise Funcional, um conhecimento prévio para se ter êxito na assimilação do conteúdos são conceitos vinculados à Álgebra Linear, que são retomados na Análise Funcional.

Segundo à concepção construtivista, as interações que ocorrem entre a realidade e o conhecimento prévio do indivíduo é organizado em forma de esquema, que corresponde, segundo Salvador(2009, p.250):

> "ao aspecto organizativo de uma ação, a estrutura que permite que essa ação possa repetir-se e ser repetida e aplicada com ligeiras modificações - em situações distintas para conseguir objetivos similares."

Essencialmente, podemos dizer que o construtivismo piagetiano afirmar que o sujeito vai construindo gradualmente seu conhecimento interagindo com a realidade que o envolve e que, quando esta interação é constante, permite construir novos esquemas e uma realidade própria, que se reflete para a aprendizagem através do conhecimento prévio. Por esse motivo, Piaget prega que a aprendizagem é um processo relativo e aprender depende do estágio de desenvolvimento, que para ele são divididos da seguinte forma:

- **Estágio sensório-motor** ( de 0 a 2 anos)
  A inteligência é prática. O bebê começa a resolver problemas cada vez mais complexos e cria esquemas evolutivos para organizar o mundo que o rodeia espacial, temporal e casualmente;

- **Estágio pré-operatório** (de 2 a 6 anos)
  A inteligência passa a ser representativa, já que os esquemas de ações são interiorizados, tornando a criança egocêntrica, pois em sua concepção ela domina o ambiente e produz um pensamento intuitivo, baseado na percepção;

- **Estágio das operações concretas** (dos 6 aos 11 anos)
  A inteligência se torna operatória, baseada em um conjunto de operações lógicas, o que, naturalmente, se reproduz em um pensamento mais lógico e formal, permitindo organizar a realidade de uma maneira mais estável, ocorrendo a conservação do seu saber;

- **Estágio das operações formais** (dos 11 aos 15 anos)
  Neste estágio temos a inteligência formal que pode ser aplicada a qualquer conteúdo, pois já se tem um pensamento combinatório, ou seja, já é possível fazer todas as combinações e variantes possíveis de um fenômeno, e se formaliza o pensamento hipotético-dedutivo, uma vez que se pode raciocinar a partir de hipóteses.

Outro importante conceito da teoria piagetiana é o de adaptação ou equilibração que resumidamente foi descrita na revista NOVA ESCOLA de abril de 2011 (p. 91),

> "Utilizados como sinônimos pelo pesquisador suíço[Piaget], os termos se referem ao processo de ampliação de conhecimento, resultado de duas etapas indissociáveis: a assimilação (interação com o meio, como forma de compreender um novo conteúdo) e a acomodação (um processo interno de construção de novas estruturas mentais que possibilitam atingir um patamar superior de conhecimento.)"

Isso pode ser entendido da seguinte forma: o indivíduo interage com a realidade que o cerca relacionanda-a com esquemas metais (assimiliação). No entanto, esses esquemas são modificados e reajustados gerando um conhecimento mais abstrato (acomodação). Isto ocorre ao longo de todo o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Salvador (2009, p.250):

> "a aquisição de novos conhecimentos - como a aquisição espontânea ligada ao desenvolvimento, ou diretamente ligada a uma situação específica do ensino - implica, para Piaget, uma sucessão de desequilíbrios - ajuste -novos equilíbrios- desequilíbrios, etc."

Em relação à Matemática, Piaget acreditava que a relação desta com a realidade se dar através de uma profunda relação entre o sujeito pensante e o objeto. Assim, de acordo com Machado (2001, p. 43), para Piaget:

> A gênese das operações lógico-matemáticas deve ser buscada (...) neste aspecto de atividades coordenadoras das ações físicas mais elementares. Entretanto, à medida que se desenvolvem operações lógico-matemáticas se diferenciam crescentemente das operações físicas a que correspondiam inicialmente, é como se, paulatinamente, fossem eliminando vínculos entre eles. A partir de certo ponto, as operações formais, as estruturas matemáticas não só se distinguem substancialmente das operações físicas como, no dizer de Piaget, superam a realidade experimental, numa última etapa, as construções axiomáticas que organizam as operações formais são elaboradas de forma independente da experiência física consistindo, às vezes, na própria negação das condições impostas pela realidade experimental.

Com isso, podemos entender que, para a concepção piagetiana, o desenvolvimento da Matemática segue o esquema seguinte: os entes matemáticos surgem da interação entre o sujeito e o objeto; em seguida, os entes se afastam do objeto concreto original, sem num entanto perder o contato quando passamos para níveis mais abstrato. Um bom exemplo para essa concepção é o que acontece com vetores, que na Geometria Analítica têm sua representação visual através de segmentos de retas orientados e que no contexto da Álgebra Linear pode representar matrizes ou funções, entre outros entes matemáticos.

No entanto, essa ideia de que o pensamento matemático surge da interação com a realidade empírica e se distancia gradativamente desta, alcançando diferentes níveis de abstração sem perder a interrelações entre os níveis, já encontrava um defensor muitos séculos antes. Aristóteles pregava, conforme Machado (2001 p. 21) *"a Matemática seria(...), o estudo das abstrações matemáticas elaboradas pelos matemáticos a partir dos objetos do mundo da percepção sensível"*, mas evidenciando que se deva ter uma formalização das teorias matemáticas através de um sistema de proposições articuladas que podem se distanciar dessa realidade, mas que ainda mantém um relação de identificação com aquela.

## 1.2 O rigor matemático e o modelo axiomático

A matemática vista enquanto ciência é automaticamente associada a um rigor que contraria a forma lúdica, no entanto, muitos professores de matemática habituam-se a expor em suas aulas com o objetivo de fazer com que seus alunos a aprendam de forma divertida e eficaz. Este ponto de vista é atual, principalmente porque nem sempre é possível, de forma satisfatória, caminhar com o lúdico e o rigor, uma vez que muitas são as variáveis envolvidas neste processo, como o domínio das duas partes de quem ensina, o objetivo de quem recebe as informações, o tempo que se tem para mediar o conhecimento, tendo em vista que diferentes pessoas adaptam os conhecimentos em tempos diferentes, dentre outros fatores.

Tal ponto de vista pode ser embasado com ideias do genial Einstein que iniciou, em sua época, uma Revolução Científica com a teoria da mecânica quântica sem data para acabar, nos trazendo o que conhecemos como ciência moderna. A teoria da relatividade de espaço e velocidade apresentada por ele quebrou um paradigma até então "mantido"pelas teorias Newtonianas de uma ciência técnica, formal e exata. Einstein trazia consigo uma teoria abstrata, porém com um índice de exemplificação bastante vasta e muito próxima de um entendimento satisfatório, muito embora (ao contrário do que muitos pensam) por trás da mesma existe um rigor matemático muito bem elaborado, que dá sustentação, organização e fundamentação as ideias.

Esta consideração pode não ser concebida como natural ou óbvia, principalmente por não percebermos que as leis da natureza fundamentam no rigor das formalizações matemáticas, e isto ouvido sem conhecimento prévio necessário parece absurdo. Embora tenhamos um mundo de contextualizações da teoria da relatividade, estudá-la é um processo de receptividade e acomodação do conhecimento dos conteúdos matemáticos prévios necessários para formalizar enquanto parte da ciência, merecendo questionamentos e redefinições para sustentar o novo.

Isto é, de fato, muito necessário, pois até a matemática carece ela mesma de fundamentação, argumentação e reorganização para obter uma credibilidade.

Como estamos tratando do conhecimento matemático é importante descrever como tal pensamento é formulado e apresentado formalmente. Por isso, optamos em fazer um breve comentário sobre os fundamentos da Matemática, destacando a escola formalista.

No final do século XVIII e início do século XIX, a matemática era vista como alicerce de muitas outras ciências, ou seja, muitas das áreas do conhecimento que se desenvolveram por volta desse período, e até mesmo antes, como a sociologia, por exemplo, utilizava-se de modelos matemáticos para embasar suas teorias. Esse é um dos principais motivos que causaram a discussão em relação aos fundamentos da matemática, gerando três escolas para esses fundamentos que, resumidamente, especificaremos como: o Logicismo, que defende que matemática pode ser reduzida a lógica; o Intuicionismo, que prega que a intuição é o fundamento da matemática; e o Formalismo, que procura mostrar que o método axiomático desempenha tal papel. Por isso, iremos nos deter a partir de agora a falar sobre o método axiomático.

O método axiomático consiste em um procedimento no qual se aceita uma quantidade mínima de noções e proposições, denominadas de postulados ou axiomas, a partir das quais se constrói uma teoria. Assim, apenas baseadas nos axiomas é que são desenvolvidas novas ideias e proposições, mediante definições e demonstrações, respectivamente.

Dentro do método axiomático podemos observar duas vertentes: a axiomática material e axiomática abstrata. A axiomática material considera algumas definições e proposições para se formalizar um sistema. A axiomática abstrata ocupa-se com os resultados obtidos no sistema sem preocupação com o seu significado inicial. Na geometria euclidiana, por exemplo, podemos verificar que no processo onde se define os entes primitivos e se aceita os axiomas básicos, contemplamos a sua axiomática material. E destacamos sua axiomática abstrata, quando estamos demonstrando teoremas, cujos resultados não são tão óbvios, a exemplo do famoso Teorema de Pitágoras.

Segundo Machado (2001, p. 30),

> Uma teoria formal conta de entes primitivos, regras para formação de fórmulas a partir deles, axiomas ou postulados, regras de inferências e teorema. Os termos primitivos descrevem os objetos concretos de que trata a teoria. As regras de formação de fórmulas organizam o discurso a respeito destes objetos, distinguem as fórmulas bem-formuladas das que carecem de significado. Os axiomas são verdades empíricas. As regras de inferência determinam as inferências legítimas e destingem, dentre as fórmulas bem-formuladas as que constituem os teoremas, que são demonstráveis a partir dos axiomas, em última análise."

PaiS (2002, p. 30) corrobora afirmando que segundo a concepção proposta pelo formalismo

> a Matemática consistiria em um tipo de jogo formal de símbolos, envolvendo axiomas, definições e teoremas. Para trabalhar com esses elementos, existem regras que permitem deduzir sequências lógicas, representando atividades matemáticas. O significado desses elementos passa a existir a partir do momento em que as fórmulas descobertas podem ser aplicadas a problemas compreensíveis no contexto em questão."

Dessa forma, percebemos que as características do método axiomático permitem otmizar a liguagem matemática, uma vez que teorias baseadas na mesma axiomática podem ser englobadas em uma teoria mais abrangente, sistematizando-as, servindo assim como instrumento para o trabalho, a pesquisa e o ensino em Matemática.

Por esse motivo, vamos apresentar alguns conteúdos da Educação Superior em Matemática de forma axiomática , o que tornará mais simples a exposição de nossas ideais a respeito da evolução gradativa do pensamento matemático.

A escolha pela apresentação desses conteúdos sob a perspectiva formalista se deve ao fato de que a ideia de aprendizagem, de acordo com Moysés(1995, p. 22),

> se faz em torno de conceitos, enunciados e definições. Daí, a utilização desses elementos como ponto de partida para o que se quer ensinar. Outra decorrência de tal enfoque é a forma de apresentar um dado conteúdo. A um conceito segue-se outro, que se articula com um terceiro, e assim por diante.

## 1.3 Transposição Didática

A encadeação de conceitos e proposições em uma teoria específica pode ser ampliada a um novo contexto e, para isso, necessita de um aprofundamento que permita ir do particular ao geral e o contrário também. Vygotsky (1987, p.70), afirma que

> um conceito se forma não pela interação de associações, mas mediante uma operação intelectual em que todas as funções mentais elementares participam de uma combinação específica (...) Quando se examina o processo de formação em toda a complexidade, este surge como um movimento do pensamento, dentro da pirâmide de conceito, constantemente oscilando entre duas direções, do particular para o geral e do geral para o particular."

Essa passagem precisa de uma conexão que transforme o conhecimento de um nível em outro. Esse processo é denominado *Transposição Didática*, em outras palavras, busca-se adaptar o conhecimento que se pretende ensinar à realidade das pessoas que irão aprender.

Quando a evolução das ideas analisa um determinado conceito temos a transposição didática *stricto sensu.* Já se analisamos um contexto mais amplo, temos uma transposição didática *lato sensu.*

No ensino superior de matemática isto se repete quando introduzimos a linguagem dos cálculos diferenciais e integrais. No estudo dos limites, por exemplo, falamos sucessivamente em valores muito grandes ou valores insignificantemente pequenos, mas não conseguimos representá-los numericamente, então nos utilizamos da ideia de infinito para tentar concretizar um pensamento matemático que cresce ou decresce indefinidamente, como veremos com mais detalhes no capítulo dois.

# Capítulo 2

# Ampliando conceitos de limite

Desde o início dos tempos o homem sente a necessidade de contar, fazer relações, bem como verificar sempre as melhores possibilidades mediante menores custos. Tal procedimento além de ser natural é também contínuo, uma vez que a cada dia temos novas situações que nos impulsionam para tomada de decisões "acertadas". Nesta perspectiva o ser deve estar sempre disposto a novos aprendizados, tanto do ponto de vista experiencial próprio, como atualizado diante das possibilidades que o circundam de informações, na busca da melhor escolha.

Podemos fazer esta mesma associação com conteúdos matemáticos estudados ao longo de toda uma vida. Fazendo uma comparação simples, temos, por exemplo, quando estudamos adição e subtração, pela primeira vez, não precisamos de nenhum pré-requisito para tal, no entanto, quando adentramos aos conteúdos de multiplicação e divisão, somos remetidos aos conteúdos de adição e multiplicação, às vezes até para que o entendimento se dê de maneira satisfatória. Ao passo que evoluímos e estudamos expressões numéricas, precisamos que tais conteúdos estejam armazenados em nossa mente. Quando fazemos uma adição estamos diante de um conteúdo matemático concreto, uma vez que podemos nos utilizar dos dedos ou qualquer objeto que nos ajude a contar, porém diante de multiplicações sem auxílio de adições ou calculadoras temos aí um grau de abstração, pois no primeiro instante aprendemos uma ideia concreta em seguida nos utilizamos de tal ideia para acomodar outra abstrata e desta forma vamos dando espaço ao aprendizado de coisas novas.

Diante desta perspectiva, nos apegamos a Piaget, que tratava em suas teorias a necessidade do aprendizado de coisas novas, da acomodação de tais coisas, bem como a necessidade de estar em um aprendizado contínuo. Piaget considera ainda que é na infância que o indivíduo aprende mais e a medida que os anos passam o aprendizado se dá de forma a acomodar os conhecimentos prévios com os novos e em outras circunstâncias se dá pela necessidade de sobrevivência do ser. Desta maneira, temos um processo natural de guardar conhecimentos e experiências para que novas se consolidem ajudando o homem a melhor viver.

Estudamos ao longo de muitos anos conceitos básicos de matemática, uns mais concretos, outros mais abstratos como já o dissemos. Até este momento tratamos a concretude como fatores palpáveis ao indivíduo, contando com a ajuda da natureza, de coisas que o circundam para o entendimento de algumas teorias. Outros assuntos, não tão simples assim, pois não encontramos de forma tão visível ou tangível, mas que ainda encontramos aplicações indiretas, no uso de tecnologias e aplicabilidades em outras ciências e isto nos ajuda na motivação do aprendizado de tais coisas. Porém ainda podemos ressaltar que ao longo do aprendizado de nossas vidas o que um dia já foi abstrato pode passar a ser concreto ou natural devido ao grau de familiaridade e isto facilita, pois, com isto, damos espaço ao aprendizado de novas abstrações e este processo está sempre em construção. Nosso foco aqui é a matemática do ensino superior, como lidar com conceitos que nos tiram de situações reais e nos fazem mergulhar em vivências cada vez mais abstratas.

A seguir faremos a definição de limites e continuaremos nossa discussão.

Dizemos que o limite de uma função $f(x)$, quando $x$ tende a $a$ , é igual a $L$ e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

quando podemos tomar valores muito próximos de (numa vizinhança, tão próximos quanto quisermos), ao passo que tomamos $x$ suficientemente próximos de $a$ (exceto possivelmente em $a$), mas não igual a $a$.

Diante desta definição algumas considerações a respeito do que falávamos anteriormente precisam ser feitas. Relembremos que diante de uma função, aprendemos que o domínio da mesma é um fator muito importante que determina a possibilidade da mesma existir ou não, ou ainda no sentido mais amplo, determina se qualquer relação é de fato uma função, já que esta implicação não é sempre verdadeira, embora o contrário seja sempre válido.

Percebemos também que a ideia de tomarmos valores muito próximos de um ponto $L$, tomando valores bem próximos de $a$, mas não igual a $a$ de nada tem de concreto. E apesar disto, não temos informação se $a$ encontra-se no domínio da $f$, bem como não temos a necessidade de que nosso $L$ seja exatamente igual a $f(a)$.

Muitas dificuldades são encontradas no ensino de Limites, uma vez que o rigor matemático se apresenta, bem como nos libertamos dos níveis de concretude e abordamos níveis cada vez mais abstratos. Temos a abordagem geométrica no estudo dos limites que, em linhas gerais, visa à observação gráfica de funções na vizinhança de um ponto, nesta fase temos ideias concretas e lógicas do ponto de vista estudantil. Porém ainda na mesma definição vemos que tal estudo não se preocupa com o ponto especificamente dito, pois em sua definição formal temos a frase "exceto possivelmente neste ponto", isto porque podemos calcular o limite de uma função mesmo que a mesma não esteja definida no ponto em que precisamos calculá-lo.

## 2.1 Um olhar teórico

Quando ensinamos o conceito de limite devemos ter em mente que estamos trabalhando com turmas que, geralmente, abrange alunos com formação e objetivos distintos. Muitos estudantes das disciplinas de cálculos estão interessados em um conhecimento mais técnico, outros necessitam de um aprofundamento conceitual para o desenvolvimento mais efetivo em outras disciplinas. De acordo com Pais (2002, p. 32), "é preciso relacionar o trabalho do professor com o trabalho do matemático, não excluindo a possibilidade de conciliar essas duas atividades. Porém, é importante lembrar que o tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático condiciona uma influência considerável na prática pedagógica.".

Dessa forma, dois aspectos devem ser prioritários nas aulas sobre limites: o formalismo matemático e os exemplos que permitem uma construção mais significativa para os alunos, ou seja, a apresentação didática do conceito. Pois de acordo com a revista NOVA ESCOLA de abril de 2011 (p. 91),

*Utilizados como sinônimos pelo pesquisador suíço [Piaget], os termos se referem ao processo de ampliação de conhecimento, resultado de duas etapas indissociáveis: a assimilação (interação com o meio, como forma de compreender um novo conteúdo) e a acomodação ( um processo interno de construção de novas estruturas mentais que possibilitam atingir um patamar superior de conhecimento.)*

Observando a forma que apresentamos e discutimos os conceitos e exemplos de limites anteriormente, defendemos que a sua apresentação deve ocorrer por meio de exemplos que enfatizem as peculiaridades das definições, pois, dessa forma, mostramos para os alunos certa concretude, isto é, através dos exemplos, eles podem visualizar a necessidade ou não de certas condições para a definição de limite. Esse tipo de exposição tem base na visão construtivista desenvolvida por Piaget. Miras (1996,p. 58), corrobora conosco afirmando:

*As mentes de nossos alunos estão bem longe de parecerem limpas, e a concepção construtivista assume esse fato como um elemento central na explicação dos processos de aprendizagem e ensino na sala de aula. Do ponto de vista desta concepção aprender qualquer um dos conteúdos escolares pressupõe atribuir um sentido e construir os significados implicados em tal conteúdo. Pois bem, essa concepção não é efetuada a partir do zero, nem mesmo nos momentos iniciais da escolaridade. O aluno constrói pessoalmente um significado (ou o reconstrói do ponto de vista social) com base nos significados que pôde construir previamente. Justamente graças a esta base é possível continuar aprendendo, continuar construindo novos significados.*

Segundo a concepção construtivista, as interações que ocorrem entre a realidade e o conhecimento prévio do indivíduo são organizadas em forma de esquema, que corresponde, segundo SALVADOR (2009,p.250) "ao aspecto organizativo de uma ação, a estrutura que permite que essa ação possa repetir-se e ser repetida e aplicada com ligeiras modificações - em situações distintas para conseguir objetivos similares".

No ensino de limite essa construção é feita inicialmente com a ideia intuitiva de aproximação, depois os exemplos vão mostrando como podemos fazer as manipulações algébricas para se calcular. Após esse primeiro contato e depois da devida compreensão, o estudante torna-se apto a estender o conceito de limite quando a variável tende a infinito e quando próprio limite é infinito.

## 2.2 Desenvolvimento

Inicialmente podemos dividir o estudo dos limites em duas partes, a primeira quando calculamos o limite de funções em um dado ponto que a mesma está definida. Este procedimento é, sem dúvidas, concreto, pois fazemos uma substituição direta. Iniciemos com um exemplo simples.

**Exemplo 1** *Seja* $f(x) = x^2$ *definida no intervalo* $[-1, 1]$, *para calcularmos*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0.$$

Podemos substituir $x$ por 0, sem restrições, já que 0 pertence ao domínio de $f$.

Formalmente a definição de limite e a seguinte:

**Definição 1** *Seja $f$ uma função e $p$ um ponto do domínio de $f$ ou extremidade de um dos intervalos que compõe o domínio de $f$. Dizemos que $f$ tem limite $L$, em $p$, se para todo $\epsilon$ dado, existir um $\delta$ tal que, para todo $x \in D(f)$ com*

$$0 < |x - p| < \delta$$

*deveremos ter*

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

A ideia intuitiva de limite é agora formalizada e tende a ser mais abstrata, mas em alguns casos podemos utilizar a forma intuitiva para calcular limites. Veja o exemplo abaixo:

**Exemplo 2** *Seja* $f(x) = x^2$ *definida no intervalo* $[-1, 1]$, *mostraremos formalmente que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

*Dado* $\epsilon > 0$, *tomemos* $\delta = \sqrt{\epsilon}$. *Para* $|x - 0| = |x| < \delta = \sqrt{\epsilon}$ *temos que*

$$|x^2 - 0| = |x|^2 < (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon.$$

**Exemplo 3** *Utilizando a ideia intuitiva de aproximação para limite, calculemos:*

$$\lim_{x\to 1} x + 1.$$

*Vamos aproximar* 1 *por valores acima e depois por valores abaixo de* 1.

| $x > 1$ | | $x < 1$ | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $x+1$ | $x$ | $x+1$ |
| *2* | *3* | *0* | *1* |
| *1,5* | *2,5* | *0,5* | *1,5* |
| *1,1* | *2,1* | *0,9* | *1,9* |
| *1,01* | *2,01* | *0,99* | *1,99* |
| *1,001* | *2,001* | *0,999* | *1,999* |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| *1* | *2* | *1* | *2* |

Neste caso também podemos substituir o 1 em $x$, uma vez que não há singularidades nesse ponto que pertence ao domínio da função.

No entanto, encontramos problemas quando a função não se encontra definida no ponto o qual tentamos calcular o limite exatamente porque não conseguimos fazer a substituição direta, porém pela definição não precisamos que a mesma esteja definida. Desta maneira, podemos realizar alguns artifícios algébricos ou utilizar regras e teoremas para o cálculo, de modo a eliminar o que chamamos de restrição (isto acontece quando fazemos a substituição e chegamos a uma indeterminação) e, com isto, verificar se o limite existe. Vejamos o exemplo abaixo:

**Exemplo 4** *Seja* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$*. Vamos considerar* $f$ *definida em* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$*.*

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1.$$

*Dessa forma, temos*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2.$$

As situações citadas anteriormente podem ser consideradas concretas, pois apesar de estarmos "fugindo"de indeterminações, que por substituição direta chegamos a absurdos ou a operações que não podem ser efetuadas, tal atividade consolidada pela própria definição de limites que nos sugere tal fuga. Isto se dá especificamente por trabalharmos com números e isto facilita nossa vida, uma vez que a vida inteira encaramos matemática como ciência exata representada por números, portanto temos uma motivação que nos instiga a calcular e nos dá como respostas números, embora tenhamos uma motivação ilógica fundamentada em uma definição.

Temos um problema quando estudamos o comportamento gráfico e a resposta do limite da função que estamos estudamos não nos dá um número como resposta.

Uma nova definição de limite foi desenvolvida para quando $x$ tende ao infinito.
Se $f$ é uma função definida em algum intervalo $(a, \infty)$, então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

significa dizer que quando os valores de $x$ são muito grandes, os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de $L$.

Se $f$ é uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$ então

$$\lim_{x\to-\infty} = L,$$

significa dizer que quando os valores de $x$ que são muito pequenos, os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de $L$.

**Definição 2** *Seja* $f$ *uma função e suponhamos que exista a tal que* $(a, +\infty)$ *contido no domínio de* $f$*. Definamos:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

*Quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta >$ a tal que*

$$x > \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

Veja o seguinte exemplo.

**Exemplo 5** *Calculemos*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}.$$

*Intuitivamente, percebemos que quanto maior o valor de $x$ mais próximo de zero estará $\frac{1}{x}$.*

*Veja a tabela:*

| $x$ | *1* | *10* | *100* | *1000* | $\rightarrow$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | *1* | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1000}$ | $\rightarrow$ | *0* |

*Agora formalmente, dado $\epsilon > 0$ , consideremos $\delta = \frac{1}{\epsilon}$ e dessa forma*

$$x > \delta \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \epsilon.$$

*E, portanto,*

$$x > \delta \Rightarrow 0 - \epsilon < \frac{1}{x} < \epsilon + 0.$$

*E assim, pela definição de limite segue que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Diante de tamanha abstração, com as definições acima, podemos ainda, conforme Piaget defendia em suas teorias as acomodações de conceitos para "dar espaço a novas teorias", nos utilizar de resultados que são abstratos e que seus objetivos auxiliam a resolver limites quando tende a infinito, que não é número. Enunciaremos o teorema que segue segundo STEWART (2011, pg 120):

**Teorema 1** *Se $r > 0$ for um número racional, então*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

*Se $r$ for um número racional tal que $x^r$ seja definida para todo $x$ em $\mathbb{R}$ , então*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

Podemos ainda nos utilizar das ideias piagetianas de acomodação para, diante do Teorema, pensar que quando dividimos uma constante pequena por um número suficientemente grande, tal divisão muito se aproxima de zero. Fazendo uma comparação concreta, se dividimos um saco de pipoca com algumas gramas em um estádio de futebol, com capacidade para algumas mil pessoas, lotado, veremos que cada pessoa receberá uma parcela ínfima, muito pequena de pipoca. E quanto mais pessoas determinado estádio comportar com a mesma quantidade de pipoca a parcela recebida é ainda menor. Desta maneira o teorema faz sentido, uma vez que quanto maior for o valor de , que está no denominador, menor será o valor da divisão. Dessa maneira, novamente utilizamos um conceito prévio, que um dia já foi abstrato em sua forma técnica, de divisão de frações, quanto maior o denominador menor o resultado da divisão, agora concreto diante do exemplo, para explicarmos como podemos raciocinar diante de um limite quando $x$ tende a algo que não é um número.

**Exemplo 6** *Calculemos*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}.$$

*Usando o teorema acima verificamos facilmente que*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Ainda há um grau um pouco maior de abstração no estudo de limites, quando o seu resultado não é real. Intuitivamente, percebemos que quando aproximamos $x$ do valor indicado temos que $f(x)$ vai ficando cada vez maior e dizemos que $f(x)$ tendo ao infinito. Formalmente, temos as seguintes definições:

**Definição 3** *Seja $f$ uma função e suponhamos que exista $a$ tal que $(a, +\infty)$ contido no domínio de $f$. Definamos:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

*quando dado $\epsilon$, existe $\delta > a$ tal que*

$$x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon.$$

**Definição 4** *Seja $f$ uma função e suponhamos que exista $a$ tal que $(a, +\infty)$ contido no domínio de $f$. Definamos:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

*quando dado $\epsilon$, existe $\delta > a$ tal que*

$$x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon.$$

**Definição 5** *Sejam $f$ uma função, $p$ um número real e suponhamos que exista $b$ tal que $(b, p)$ contido no domínio de $f$. Definamos:*

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty,$$

*quando dado $\epsilon$, existe $\delta$, com $p + \delta < b$, tal que*

$$p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon.$$

Vamos mostrar um exemplo para esta definição.

**Exemplo 7** *Calculemos*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}.$$

*Inicialmente, observemos a tabela a seguir:*

| $x$ | *1* | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1000}$ | $\rightarrow$ | $0^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | *1* | *10* | *100* | *1000* | $\rightarrow$ | $+\infty$ |

*Intuitivamente, percebemos que quando $x$ tende a zero pela esquerda, temos que $\frac{1}{x}$ tende a infinito positivo. Vamos mostrar formalmente esse fato.*

*Dado $\epsilon$, escolhamos $\delta = \frac{1}{\epsilon}$. Dessa forma, para*

$$0 < x < \delta$$

*verificamos que*

$$\frac{1}{x} > \epsilon.$$

*E, portanto,*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Esses exemplos mostram como o conceito de limite pode ser estendido a níveis mais abstratos, sem perder, no entanto, a ideia essencial de aproximação.

## 2.3 Algumas considerações

Como pudemos observar ao longo das nossas discussões, o nível de abstração relacionado aos conteúdos estão intimamente relacionados com o nível de conhecimentos prévio armazenado, bem como com o nível de acomodação de tais conhecimentos. Daí, vamos dando espaço a novos conceitos e estes de forma muito natural vão sendo acomodados e tornados concretos ou até mesmo naturais (como usamos na linguagem matemática) até que novos conceitos se façam presentes e tenhamos a faze de acomodação.

O conceito de limites em sua primeira definição torna-se abstrato pelo fato de que excluímos o ponto em que estamos interessados, porém em substituições diretas utilizamos o referido ponto, o que o torna concreto quando fazemos manipulações algébricas e através do domínio conseguimos extinguir uma indeterminação e consequentemente, como não estamos interessados propriamente no ponto, conseguimos chegar, quase sempre, a um resultado numérico. Quando apresentamos as definições precisas, podemos observar que a definição primária agora se torna concreta por serem estas outras definições com o teor de abstração bem maior, ou ainda podemos dizer que o que era abstrato foi acomodado para outros conceitos serem entendidos. Assim os conceitos de limites no infinito podem ser considerados abstratos até que possamos exemplificá-los de maneira tangível ou imaginável.

Desta maneira, podemos perceber que as abstrações matemáticas também dependem de quanto os profissionais de ensino se esforçam para exemplificar, este trabalho nem sempre é fácil, porém os nossos principais aliados, os alunos, podem muito contribuir para tal.

# Capítulo 3

# Geometria Analítica

A Geometria Analítica resulta da ligação entre dois ramos da matemática: a Geometria e a Álgebra. Baseada em um sistema de coordenadas através do qual podemos estabelecer representações de pontos, retas e planos no espaço tridimensional, esta área matemática possibilita o cálculo de comprimento, área, volume de maneira bastante simples, bem como permite interpretar curvas, superfícies e sólidos, associando formas geométricas a representações algébricas.

De acordo com LIMA (1992, p.3), *"isto permite tratar algebricamente muitas questões geométricas e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica certas situações algébricas. A interconexão entre Geometria e Álgebra resultante desse ponto de vista foi responsável por extraordinários progressos na Matemática e suas aplicações."*

Essa área matemática começou a ser desenvolvida no século XVII através dos trabalhos de Viète, Fermat e Descartes que passaram a utilizar números para determinar a posição de uma figura no espaço.

Inicialmente, o desenvolvimento da geometria analítica contemplava basicamente a resolução de problemas da geometria plana. No século XIX, através do trabalho de Gauss que estabeleceu elos entre a Geometria e os números complexos, começa a tomar forma o que posteriormente se tornaria o conceito de vetor. No entanto, esta definição seria plenamente desenvolvida com a contribuição de vários estudiosos como William Rowan Hamilton, Hermann Grassmann, Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace, Oliver Heaviside, entre outros. Só então, foi possível utilizar as técnicas da Geometria Analítica para potencializar a resolução de problemas geométricos com mais de duas dimensões.

No Brasil, o ensino de Geometria Analítica atualmente é iniciado no Ensino Médio, contemplando tópicos como representação de pontos, retas e, em alguns casos, planos, além de cálculos de distância e ângulos entre alguns desses objetos. No entanto, a abordagem de tais conteúdos pode variar de acordo com o estado. Por exemplo, no Ensino Médio das escolas paraibanas, a Geometria Analítica ensinado contempla apenas o seu aspecto bidimensional, restringindo-se a explanar o uso de coordenadas sem expor os conceitos e aplicações relativos a vetores. Ao passo que, nas escolas fluminenses, o ensino abrange Geometria Analítica em três dimensão, a introdução de vetores num contexto matemático. Já na França, de acordo com BITTAR (2009), o conceito de vetor é introduzido no nível de ensino que corresponde ao nosso Ensino Médio.

No Ensino Superior, esse conteúdo está presente no currículo de diversos cursos das áreas de Tecnologia e Ciências Exatas, como Matemática, Física, Química e Engenharias.

Aqui exporemos alguns tópicos da Geometria Analítica, procurando fundamentá-la conceitualmente de forma gradativa, fazendo sempre que possível a correspondência dos conceitos com suas representações geométricas.

## 3.1 O uso de coordenadas na reta

Os números reais podem ser associados aos pontos de uma reta. Basta fixar um ponto $O$, como origem, e um ponto $A$ diferente de $O$ e definir o comprimento do segmento $OA$ como unidade. À reta $OA$ chamaremos de reta real, ou eixo real.

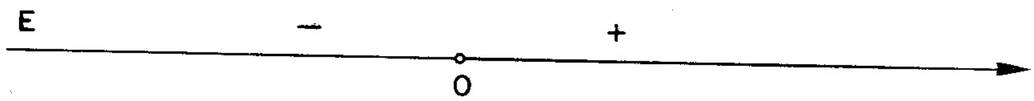


figura 1

**Definição 6** *A origem $O$ divide essa reta em duas semirretas: a que contém $A$ denominaremos de* ***semirreta positiva****; e a outra chamaremos de* ***semirreta negativa****.*

Convencionalmente, aos pontos localizados sobre a primeira semirreta diremos pontos situados à direita de $O$ e para os sobre a outra semirreta, diremos pontos situados à esquerda de $O$.

A partir disso e usando o fato de que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ estabeleceremos uma correspondência entre a reta real e o conjunto dos números reais.

Tomando $X$ um ponto qualquer da reta $OA$, quando o comprimento de $OA$ couber um número exato de vezes no segmento $OX$, diremos que a coordenada de $X$ é o número natural $n$, se $X$ está à direita de $O$, ou o número negativo $-n$, se $X$ está a esquerda de $O$ e caso $X$ coincida com $O$ sua coordenada será zero. Assim, qualquer número inteiro e, consequentemente, natural, pode ser representado na reta dada.

De forma mais geral, se o ponto $X$ da reta real é tal que um segmento $w$ caiba $n$ vezes no segmento $OA$ e $m$ vezes no segmento $OX$, podemos tomar a coordenada de $X$ como $\frac{m}{n}$ ou $\frac{-m}{n}$, caso $X$ esteja à direita ou à esquerda de $O$, respectivamente. Notemos que se $n = 1$, então $X$ está associado a um número inteiro.

É importante observar que da forma que os números racionais foram associados aos pontos da reta real, podemos utilizar o conceito de comensurabilidade, pois:

**Definição 7** *Dois segmentos $AB$ e $CD$ são ditos* ***comensuráveis*** *quando é possível encontrar um terceiro segmento $w$, que caiba $m$ vezes em $AB$ e $n$ vezes em $CD$. Caso contrário, os segmentos são ditos incomensuráveis.*

Um exemplo bastante conhecido de segmentos incomensuráveis ocorre quando comparamos a diagonal de um quadrado de lados com medidas racionais com um desses lados.

Quando comparamos um ponto $X$ no eixo real de modo que os segmentos $OX$ e $OA$ são incomensuráveis diremos que o número $x$, correspondente ao comprimento de $OX$, é irracional e poremos $x$ como a coordenada do ponto $X$. O número $x$ será positivo ou negativo dependendo da posição de $X$ relativa a $O$.

Dessa forma, relacionamos qualquer número real com os pontos dessa reta, já que os números reais são constituídos por números racionais e irracionais.

Reciprocamente, a partir do que foi exposto, podemos também interpretar o conjunto $\mathbb{Z}$ como sendo formado pelo número 0 e pelas coordenadas dos pontos $X$ do eixo real, cujo segmento unitário $OA$ cabe uma quantidade exata de vezes no segmento $OX$. Também, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ pode ser interpretada como as coordenadas dos pontos $X$ cujos segmentos $OX$ é comensurável com o segmento unitário. E mais geralmente, dado $X$ qualquer número sobre o eixo real, o número real $x$ é tal que $x = d(O, X)$, se $X$ está à direita de $O$, $x = -d(O, X)$, se $X$ está à esquerda de $O$, e zero se $X$ coincidir com $O$, onde $d(O, X)$ é o comprimento do segmento $OX$ ou a distância entre os pontos $O$ e $X$.

Dessa forma, obtemos uma correspondência biunívoca entre a reta $OA$ e o conjunto dos números reais, de modo que cada ponto $X$ dessa reta associa-se à sua coordenada. Assim, como afirma LIMA (2006, p.57) *"O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta, enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$. Esta inter-relação entre Geometria e Aritmética, entre pontos e números, é responsável por grandes progressos da Matemática atual."* A Geometria Analítica é um dos ramos que mais se desenvolveu utilizando esta correspondência, aplicando seus métodos em áreas do conhecimento como Física e Engenharia.

No contexto unidimensional, podemos associar intuitivamente a relação de ordem dos números reais com a posição de dois pontos da seguinte forma:

**Proposição 1** *O ponto $X$ está à esquerda do ponto $Y$, se e somente se, $x \leq y$ e pomos $d(X, Y) = |x - y|$.*

**Demonstração:**

Utilizaremos os fato de $d(A, B) \geq 0$, $d(A, B) = d(B, A)$ e que se $A, B$ e $C$ são pontos sobre a mesma reta $B$ está entre $A$ e $C$ então $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

Se $X = Y$, então nada há o que provar. Supondo, a princípio, que $X$ esteja à esquerda de $Y$, assim, $x \leq y$. Teremos 3 casos a analisar:

1. $X$ e $Y$ estão situados à direita de $O$, ou seja, $0 \leq x \leq y$;

2. $X$ e $Y$ localizam-se à esquerda de $O$, logo $x \leq y \leq 0$;

3. $X$ e $Y$ estão sobre semirretas distintas em relação à origem, isto significa que $x \leq 0 \leq y$.

Lembremos que $|x-y| = x-y$, se $x > y$, e $|x-y| = y-x$, se $y > x$. Dessa forma, no primeiro caso, temos que $d(O,X) = x$ e $d(O,Y) = y$ e como $X$ está entre $O$ e $Y$, verificamos:

$$d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y)$$

e segue que

$$d(X,Y) = d(O,Y) - d(O,X) = y - x = |x-y|.$$

Para o segundo caso, observamos que $d(O,X) = -x$ e $d(O,Y) = -y$, agora temos $Y$ é o ponto que está entre $X$ e $O$, e assim

$$d(O,X) = d(O,Y) + d(Y,X),$$

donde

$$d(X,Y) = d(Y,X) = d(O,X) - d(O,Y) = -x - (-y) = y - x = |x-y|.$$

Já no terceiro caso, $O$ está entre $X$ e $Y$, e $d(O,X) = -x$ e $d(O,Y) = y$. Então,

$$d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) = -x + y = |y-x|.$$

Se considerarmos que $X$ está à direita de $Y$ a demonstração é análoga.

Uma importante aplicação desse resultado está em determinar uma expressão algébrica para um segmento de reta, o que consequentemente, pode fornecer a equação paramétrica da reta $AB$, expandindo o domínio do parâmetro. Veja:

**Exemplo 8** *Tomando-se a reta real fixemos dois pontos quaisquer $A$ e $B$, com $A$ à esquerda de $B$, e suas coordenadas $a$ e $b$, respectivamente. Seja $X$ um ponto qualquer do segmento $AB$, cuja coordenada é o número $x$, dessa forma temos que $a \leq x \leq b$. Usando a correlação estabelecida entre os números reais e a reta, observamos que o segmento de reta $AB$ contido no eixo real corresponde ao intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Para cada ponto $X$ do segmento de reta $AB$, temos que $d(A,X) \leq d(A,B)$, logo a razão $t = \frac{d(A,X)}{(A,B)}$ é um número entre $0$ e $1$. Observemos que se $X = A$, teremos $t = 0$, e no caso que $X = B$, verificamos que $t = 1$. Mas geralmente, para $t \in [0,1]$, denotemos por $X_t$ o ponto do segmento de reta tal que $\frac{d(A,X)}{d(A,B)} = t$ verificamos que as coordenadas $x_t$ do ponto $X_t$ relaciona-se com as coordenadas dos pontos $A$ e $B$ através de*

$$\frac{x_t - a}{b - a} = t,$$

*que pode ser expressa por*

$$x_t = (1-t)a + tb = a + t(b-a).$$

**Exemplo 9** *Fazendo $t$ variar em todo os números reais, obtemos a equação paramétrica para a reta real. Formalizamos, assim, uma bijeção entre o conjunto dos números reais com uma reta.*

**Exemplo 10** *Quando $t = \frac{1}{2}$, encontramos uma representação algébrica para a coordenada do ponto médio do segmento $AB$, que é expressa por:*

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

Estes exemplos corroboram para percebemos que a correspondência entre os números reais e a reta transfere propriedades geométricas aos números reais, permitindo que façamos interpretações tanto aritméticas quanto geométrica desse conjunto.

## 3.2 O uso de coordenadas no Plano

O plano, por se tratar de um lugar geométrico bidimensional, pode ter a localização de cada um de seus pontos relacionada a duas coordenadas. Assim estabelecemos algumas definições para mostrar esse fato:

**Definição 8** *Um **par ordenado** $P = (x, y)$ é formado por um elementos $x$, denominado primeira coordenada de $P$ e outro elemento $y$, chamado de segundo coordenada de $P$. Dois pares ordenados $P = (x, y)$ e $Q = (a, b)$ são iguais se, e somente se, $x = a$ e $y = b$.*

**Definição 9** *O **produto cartesiano** dos conjuntos $X$ e $Y$ é o conjunto $X \times Y$ dos pares ordenados $(x, y)$ com $x \in X$ e $y \in Y$, representado por*

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

Esta definição pode ser estendida para uma quantidade finita de conjuntos.

Tomando $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}$, obtemos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, onde os elementos $(x, y)$ são pares de números reais. Estes pares podem ser interpretados como as coordenadas de um ponto $P$ do plano $\pi$, e denominaremos $x$ a **abscissa** e $y$ a **ordenada** relativas ao ponto $P$.

Podemos fixar neste plano um par de eixos ortogonais $OX$ e $OY$, com sua interseção no ponto $O$, o qual chamaremos de origem do**sistema de coordenadas** $OXY$.

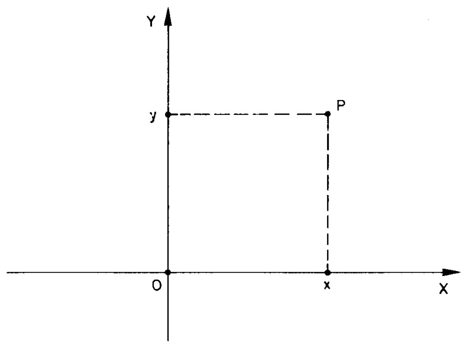


figura 2

Observando a figura, percebemos que o ponto $P$ de $\pi$ tem como abscissa o número $x$ e ordenada $y$.É importante perceber que $x$ e $y$ podem ser visualizadas como as coordenadas dos pés das perpendiculares baixadas a partir de $P$, respectivamente, sobre os eixos $OX$ e $OY$, ou seja, podem ser vistos como as coordenadas do ponto de intersecção das perpendiculares das retas $OX$ e $OY$ que passam por $P$.

Caso $P$ pertença ao eixo $OX$, o par ordenado correspondente será $(x, 0)$, onde $x$ representa a coordenada de $P$ no eixo $OX$, recaindo nas condições de coordenadas sobre uma reta. Analogamente, se $P$ está no eixo $OY$, suas coordenadas são representadas por $(0, y)$. E portanto, como $O$ é a interseção desses eixos suas coordenadas são representadas por $(0, 0)$.

Dessa forma verificamos que: *"a função $f : \pi \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto $P$ do plano $\pi$ seu par de coordenadas $f(P) = (x, y)$ relativamente ao sistema de eixos $OXY$, é uma correspondência biunívoca. Ela permite traduzir conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre números reais."*(LIMA, 2000, p.83)

Um exemplo simples desse fato é que a localização dos pontos em relação aos eixos pode ser observadas por suas coordenadas. Notemos que os eixos ortogonais $OX$ e $OY$ dividem o plano $\pi$ em quatro regiões, caso uma denominada quadrante.

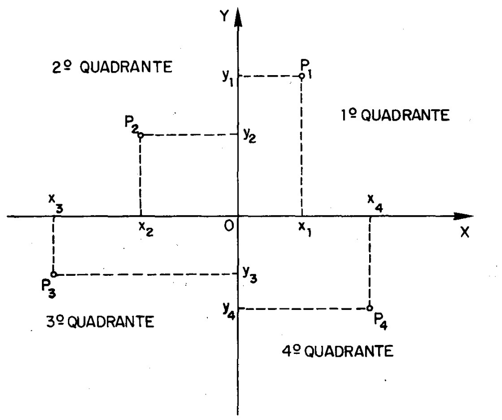


figura 3

Podemos verificar a posição de um ponto em relação aos eixos coordenados, ou seja, determinar em que quadrante eles se encontram observando as suas coordenadas.

**Exemplo 11** *Os sinais das coordenadas do ponto $P = (x, y)$ variam de acordo com o quadrante. Desse modo, temos que se $P$ pertence ao:*

- *Primeiro quadrante , então $x \geq 0$ e $y \geq 0$;*
- *Segundo quadrante, temos $x \leq 0$ e $y \geq 0$;*
- *Terceiro quadrante, verificamos que $x \leq 0$ e $y \leq 0$;*

- *Quarto quadrante, notamos que* $x \geq 0$ *e* $y \leq 0$.

Como fizemos quando apresentamos as coordenadas de um ponto em relação à reta, no plano podemos associar à ideia geométrica de ponto médio a uma expressão algébrica, também podemos representar algebricamente uma reta através de equações paramétricas e conseguimos determinar um algoritmo para determinar a distância entre dois pontos por meio de suas coordenadas. Veja os exemplos:

**Exemplo 12** ***()Equações paramétricas da reta)***
*Dados os pontos* $A = (a, b)$ *e* $A' = (x, y)$ *e um número real* $t$*, verifiquemos que as coordenadas do ponto* $X_t = (x_t, y_t)$ *localizado sobre a reta* $AA'$ *de tal modo que* $\frac{d(A,X_t)}{d(A,A')} = t$ *são* $x_t = (1-t)a + tx$ *e* $y_t = (1-t)b + ty$.

*No caso em que a reta* $AA'$ *é horizontal ou vertical, verificamos que o argumento para obter as coordenadas de* $X_t$ *é o mesmo utilizado para determinar as coordenadas sobre o eixo real, visto quando expomos as coordenadas sobre uma reta. Desse modo, teremos se:*

- $b = y$*, o segmento* $AA'$ *é horizontal e*

$$X_t = (x_t, b) = ((1-t)a + tx, b);$$

- $a = x$*, o segmento* $AA'$ *é vertical e*

$$X_t = (a, y_t) = (a, (1-t)b + ty).$$

*Quando* $a \neq x$ *e* $b \neq y$*, vamos observar a figura abaixo:*

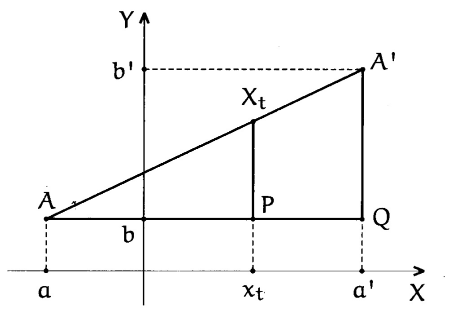


*figura 4*

*Comparemos os triângulos retângulos* $APX_t$ *e* $AQA'$*, com* $P = (x_t, b)$ *e* $Q = (x, b)$*, que são semelhantes por terem um ângulo agudo em comum e dessa forma obtemos a razão de semelhança* $t = \frac{d(A,X_t)}{d(A,A')} = \frac{AP}{AQ}$*, resultando que* $\frac{x_t - a}{x - a} = t$*, ou equivalentemente,* $x_t = (1-t)a + tx$*. De forma análoga, chega-se que* $y_t = (1-t)b + ty$*. É importante frisar que o* $t$ *é o mesmo em ambas as expressões. E temos expressões paramétricas para a reta do plano.*

*É importante também, observar que se $0 \leq t \leq 1$, obtemos a expressão algébrica para o segmento $AA'$. E quando fazemos $t = \frac{1}{2}$, obtemos algebricamente as coordenadas do ponto médio do segmento $AA'$, que é expressa por:*

$$M = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right).$$

Uma noção geométrica básica, a distância entre dois pontos, tem seu valor determinado de maneira bastante simples na Geometria Analítica em função das coordenadas dos pontos dados.

**Exemplo 13** ***(Distância entre dois pontos)***

*Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, afirmamos que a distância entre $P$ e $Q$ é expressa por*

$$d(P, Q) = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}.$$

*Primeiro consideremos o caso em que $P$ e $Q$ tenham a mesma ordenada, desse modo $y = v$. Daí a distância $d(P, Q)$ é igual à distância $|u - x|$ entre as suas projeções sobre o eixo $OX$. Analogamente, se $P$ e $Q$ têm mesma abscissa, de modo que $x = u$, então $d(P, Q) = |y - v|$ correspondente às projeções de $P$ e $Q$ sobre o eixo $OY$. Observemos que expressões das distâncias nos casos em que o segmento é horizontal ou vertical, são casos particulares da fórmula acima quando $x = u$ e $y = v$, respectivamente. Agora, consideremos $P$ e $Q$ com abscissas e ordenadas distintas e tomemos o ponto $S = (u, y)$, temos que o triângulo $PSQ$ é retângulo cuja hipotenusa é $PQ$, como representado na figura.*

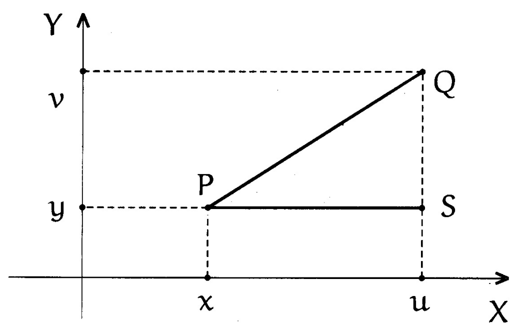


*figura 5*

*Como $P$ e $S$ possuem a mesma ordenada e $Q$ e $S$ possuem a mesma abscissa, verificamos que:*

$$d(P, S) = |x - u| \text{ e } d(S, Q) = |y - v|$$

*Daí, utilizando o Teorema de Pitágoras, escrevemos*

$$d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(S, Q)^2.$$

*Assim,*

$$d(P,Q)^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2,$$

*e finalmente*

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

*Particularmente se desejarmos calcularmos a distância de um ponto* $P = (x,y)$ *à origem* $O = (0,0)$ *é*

$$d(P,O) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

## 3.3 O uso de coordenadas no espaço

Agora trabalharemos no espaço tridimensional euclidiano $E$, onde utilizaremos um sistema de eixos $OXYZ$, que consiste em três eixos $OX$, $OY$ e $OZ$, dois a dois perpendiculares, com o ponto $O$ em comum, que será denominado de origem do sistema. A partir dessa fixação, obtemos $\pi_{XY}$, $\pi_{YZ}$ e $\pi_{XZ}$, os planos determinados pelos pares de eixos $OX$ e $OY$, $OY$ e $OZ$, $OX$ e $OZ$, respectivamente.

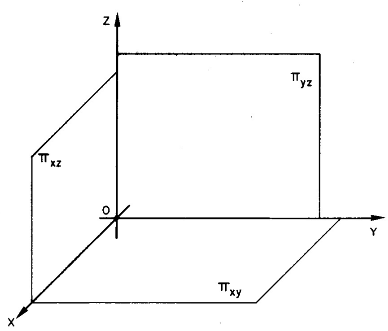


figura 6

Com essa escolha dos eixos é possível associar a cada ponto $P$ do espaço $E$ um terno ordenado $(x,y,z)$ de números reais, chamados de **coordenadas de $P$ em relação ao sistema $OXYZ$.** Essas coordenadas podem ser determinadas utilizando o seguinte procedimento: dado $P$ um ponto qualquer tracemos a reta paralela ao eixo $OZ$ passando por $P$, que intercepta o plano $\pi_{XY}$ no ponto $P_0$. Seja $(x,y)$ as coordenadas de $P_0$ no sistema $OXY$ do plano $\pi_{XY}$. Estas são as duas primeiras coordenadas de $P$. Agora, tracemos a reta paralela ao eixo $OX$ que liga $P$ ao ponto $P_1$ do plano $\pi_{YZ}$. Seja $(y,z)$ as coordenadas de $P_1$ no sistema $OYZ$ do plano $\pi_{YZ}$, o número $z$ é a última coordenada de $P$.

Usando a notação $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, para representar o conjunto cujos elementos são ternos ordenados $(x,y,z)$ de números reais. Podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre $E$ e $\mathbb{R}^3$, no qual cada ponto do espaço $E$ corresponde um elemento do $\mathbb{R}^3$, a exemplo do que mostramos com a reta e $\mathbb{R}$ e o plano e $\mathbb{R}^2$.

No contexto tridimensional também poderemos determinar expressões algébricas para as retas, para o ponto médio e para a distância entre dois pontos. Por enquanto, exporemos expressões para as coordenadas do ponto médio e para determinar a distância entre dois pontos através de suas coordenadas.

**Exemplo 14** ***(Ponto médio de um segmento)***

*Dados os pontos* $A = (a_1, b_1, c_1)$ *e* $B = (a_2, b_2, c_2)$*, o ponto médio* $M$ *do segmento* $AB$ *tem coordenadas* $(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}, \frac{c_1+c_2}{2})$*. De fato, se considerarmos o segmento* $A'B'$ *a projeção do segmento* $AB$ *sobre o plano* $\pi_{XY}$*, verificamos que a* $A' = (a_1, b_1)$ *e* $B' = (a_2, b_2)$ *no sistema de coordenadas* $OXY$*, e teremos que* $M' = (\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2})$ *o ponto médio do segmento* $A'B'$ *é a projeção do ponto* $M$ *sobre* $\pi_{XY}$*. E daí concluímos que as duas primeiras coordenadas de* $M$ *são* $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}$*. Usando raciocínio análogo, agora sobre a projeção do segmento* $AB$ *sobre o plano* $\pi_{YZ}$*, obtemos a última coordenada do ponto* $M$ *que é* $\frac{c_1+c_2}{2}$*. Como queríamos.*

**Exemplo 15** *Sejam* $OXYZ$ *um sistema de eixos ortogonais no espaço* $E$ *e* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$*, pontos dados, a distância entre* $P_1$ *e* $P_2$*é determinada por*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

*Consideremos os pontos auxiliares* $Q = (x_1, y_2, z_1)$ *e* $R = (x_2, y_2, z_1)$*. E temos que os segmentos de reta* $P_1Q, OR$ *e* $RP_2$*, são paralelos, respectivamente, aos eixos* $OY$*,* $OX$ *e* $OZ$*. Desse modo, considerando-se as projeções desses segmentos sobre seus respectivos eixos paralelos, obtemos*

$$d(P_1, Q) = |y_1 - y_2|, d(Q, R) = |x_1 - x_2| \text{ e } d(R, P_2) = |z_1 - z_2|.$$

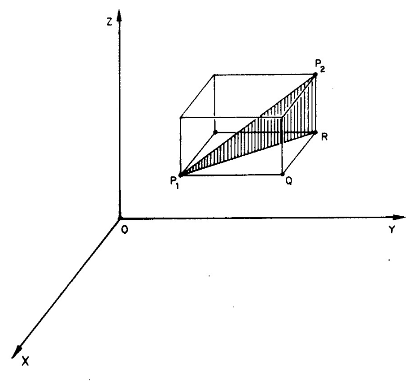


*figura 7*

*E como estamos baseando-se em um sistema de eixos ortogonais, percebamos que os triângulos* $P_1QR$ *e* $P_1RP_2$ *são retângulos. Do que decorre que*

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, R)^2 + d(R, P_2)^2 = d(P_1, Q)^2 + d(Q, R)^2 + d(R, P_2)^2,$$

*ou seja,*

$$d(P_1, P_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

*E obtemos*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

*Em particular, a distância de um ponto* $P = (x, y, z)$ *à origem* $O = (0, 0, 0)$ *é* $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Podemos, considerando o espaço euclidiano tridimensional, determinar a equação paramétrica de um plano $\pi$. No entanto, essa expressão para ser deduzida de maneira simples requer ferramentas mais elaboradas, do que o conhecimento que usamos para expor as expressões até o presente momento, como o conceito de vetor no $\mathbb{R}^3$.

## 3.4 Vetores

O uso de métodos algébricos na Geometria Analítica abrange uma gama bem variada de utilidades, que pode servir desde estudos gráficos de funções à estudos geográficos. Mas esse ramo matemático tem sua eficiência ampliada quando se acrescenta a ele o uso de vetores. De acordo com LIMA(1992, p. 86)“ *Com eles a Álgebra, além de intérprete dos fatos geométricos, penetra na Geometria e passa a fazer parte dela.* ”

Neste contexto, podemos definir vetor como uma classe de equivalência de segmentos orientados. Dessa forma, os vetores não dependem de um sistema de coordenadas, mas podemos estabelecer condições para que se efetue cálculos vetoriais com o auxílio das coordenadas.

**Definição 10** *Dizemos que um* ***segmento*** *de reta está* ***orientado*** *quando está determinado um sentido para o percurso, chamado de* ***sentido positivo****.*

Assim, ao se fazer referência ao segmento $AB$ , significa que o seu sentido positivo é de $A$ para $B$, ao passo que para o segmento $BA$ é de $B$ para $A$.

**Definição 11** *Os segmentos de reta* $AB$ *e* $CD$ *são* ***equipolentes****, e escrevemos* $AB \equiv CD$*, quando eles:*

- *têm mesmo comprimento;*
- *são paralelos ou colineares;*
- *têm o mesmo sentido.*

Podemos entender a primeira condição como $d(A, B) = d(C, D)$. Já a segunda condição significa que estão sobre o mesmo plano e quando são colineares que estão sobre a mesma reta. A terceira condição, no caso da colinearidade, garante que o sentido positivo de $AB$ é o mesmo de $CD$, e quando são paralelos, indica ainda mais, pois além $AB$ e $CD$ serem paralelos e terem mesmo sentido é garantido o paralelismo entre $AC$ e $BD$, em outras palavras o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo.

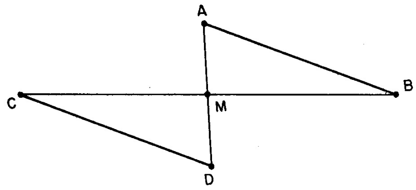


figura 8

Este fato serve para caracterizar segmentos equipolentes, no caso destes não serem paralelos, pois como o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo suas diagonais $AD$ e $BC$ se interceptam no ponto médio de cada uma.

Observemos que esta é uma relação de equivalência, pois temos que $AB \equiv CD$ é reflexiva, ou seja, $AB \equiv AB$; simétrica, já que $AB \equiv CD \Rightarrow CD \equiv AB$; e transitiva, uma vez que $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, teremos $AB \equiv EF$.

Dessa maneira, termos a motivação para a seguinte definição.

**Definição 12** *Quando dois segmentos orientados de reta $AB$ e $CD$ são equipolentes, dizemos que eles determinam o memos* ***vetor****, ou seja, um vetor é uma classe de equivalência de segmentos orientados em relação a sua equipolência.*

Indicaremos por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ o vetor que representa a classe de equivalência onde o segmento $AB$ é representante. Dessa maneira, $AB \equiv CD$, significa a igualdade $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. É conveniente pormos o vetor nulo $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$, cujo representante é o segmento degenerado $AA$, cuja origem coincide com a extremidade.

A visualização de vetores pode ser observada na figura abaixo.

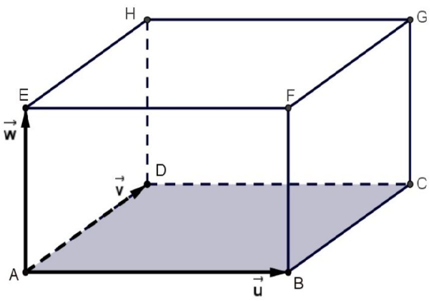


figura 9

Com esta definição de vetores podemos a partir de um ponto e um segmento orientado determinar o único vetor que é equipolente ao primeiro passando pelo ponto dado. A proposição seguinte formaliza tal fato.

**Proposição 2** *Dados um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto $P$, existe um único ponto $Q$ tal que o segmento $PQ$ é equipolente a $AB$, ou seja, com $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.*

**Demonstração:**

Se $P$ pertence à reta $AB$, basta traçar o segmento de reta $PQ$, com o mesmo comprimento de $AB$, de maneira que o sentido de $PQ$ coincida com o de $AB$.

Caso $P$ não pertença à reta $AB$, tracemos pelo ponto $P$ a reta $r$ paralela a $AB$ e pelo ponto $B$ a reta $s$ paralela à reta $AP$, o ponto procurado a interseção das retas $r$ e $s$. Veja figura.

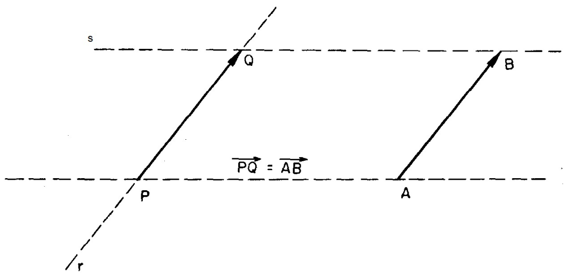


figura 10

Isto mostra que dado um vetor $\overrightarrow{v}$, poderemos representá-lo por um segmento orientado $PQ$, com a origem localizada em qualquer ponto $P$ do espaço. É por esse motivo que podemos interpretar vetores como elementos que transportam um ponto $P$ para um outro ponto $Q$, resgatando o sentido linguístico da palavra vetor, que provem do latim *vehere* e significa transportar.

## 3.5 Vetores e coordenadas

Quando determinamos as equações paramétricas de uma reta $AB$, em relação a um parâmetro $t$, verificamos que se $0 \leq t \leq 1$, esta equação determina o segmento $AB$, cuja origem é $A$ e a extremidade $B$. Dessa maneira fixando um sistema de coordenadas $OXYZ$ no espaço euclidianos, podemos determinar um vetor por suas coordenadas.

Já sabemos que fixado um sistema de eixos ortogonais de origem $O$ no espaço, sejam $A = (x, y, z)$ e $B = (a, b, c)$ existe um único ponto $P$ tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, o que nos motiva para a seguinte afirmação:

**Afirmação 1** *As coordenadas de $P$ são $(a - x, b - y, c - z)$.*

**Demonstração:**

Observando a projeção do vetor $\overrightarrow{AB}$ sobre o plano $\pi_{XY}$, temos o vetor $\overrightarrow{A'B'}$, com $A' = (x, y)$ e $B' = (a, b)$ no sistema de coordenadas $OXY$, de maneira análoga construímos o vetor $\overrightarrow{O'P'}$ como projeção do vetor $\overrightarrow{OP}$ sobre o plano $\pi_{XY}$. Verificamos que o segmentos $A'B'$ e $O'P'$ têm a mesma inclinação $\frac{b-y}{a-x}$ já que são paralelos, e os segmentos $OA'$ e $P'B'$ têm inclinação $\frac{x}{y}$. Como $A'B'$ e $O'P'$, bem como $OA'$ e $P'B'$ são lados de um paralelogramo, segue que $A'B'$ e $O'P'$ são equipolentes. Daí, temos que as diagonais sobre as retas $OB'$ e $A'P'$ se interceptam no mesmo ponto $M$ e concluímos que $P' = (a-x, b-y)$.

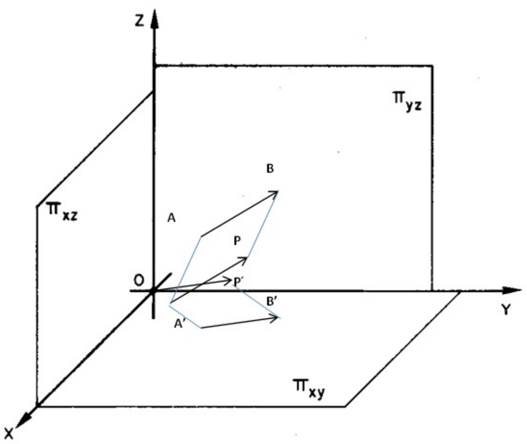


figura 11

De maneira inteiramente análoga, utilizando, agora, a projeção de $\overrightarrow{AB}$ sobre o plano $\pi_{YZ}$ e com o sistema de coordenadas $OYZ$ , representada pelo segmento $A"B"$, onde $A" = (y, z)$ e $B" = (b, c)$, concluímos que as coordenadas de $P$ são $(a - x, b - y, c - z)$.

Além disso temos que

**Afirmação 2** *Dados* $A = (x, y, z)$, $B = (x', y', z')$, $C = (a, b, c)$ *e* $D = (a', b', c')$, *então* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *se, e somente se,* $x' - x = a' - a$, $y' - y = b' - b$ *e* $z' - z = c' - c$.

**Demonstração:**

De fato, existe um único $P = (x' - x, y' - y, z' - z)$ tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ e um único $Q = (a' - a, b' - b, c' - c)$ tal que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{CD}$. Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, pela transitividade da relação de equivalência temos que $P = Q$, e portanto,

$$x' - x = a' - a, y' - y = b' - b \text{ e } z' - z = c' - c$$

Assim , tendo $A = (x, y, z)$ e $B = (x', y', z')$, poderemos estabelecer que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (x' - x, y' - y, z' - z)$.

Observemos que podemos escolher o representante $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ de maneira que a origem do segmento representante coincida com a origem $O = (0, 0, 0)$ do sistema $OXYZ$. Dessa forma as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ coincidem com as coordenadas do ponto $P$.

## 3.6 Operações com vetores

Os vetores, no contexto da Geometria Analítica, são instrumentos bastante úteis, principalmente, quando se pode efetuar entre eles operações que independam do sistema de coordenadas tomado. No entanto, poderemos perceber que as coordenadas funcionam como excelentes auxiliares em cálculos vetoriais. No segue, apresentaremos algumas operações usando coordenadas que ajudam a compreender de forma algébrica as operações geométricas definidas anteriormente, concretizando a junção dessas duas aréas matemáticas nesse contexo.

**Adição de vetores**

A soma entre dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, indicada po $+$, pode ser definida de duas maneiras equivalentes. A primeira mais geral:

**Definição 13** *Representemos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{A'A''}$ e consideremos os segmento $AA''$, este será o representante do vetor soma de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, ou seja,*

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AA''}.$$

A outra definição tem sentido apenas quando os vetores não são paralelos.

**Definição 14** *Representemos o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$ e tomemos como representante da soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$, onde o segmento $AD$ é a diagonal do paralelogramo que têm lados $AA'$ e $AC$.*

As figuras abaixo ajudam a visualizar essa definições.

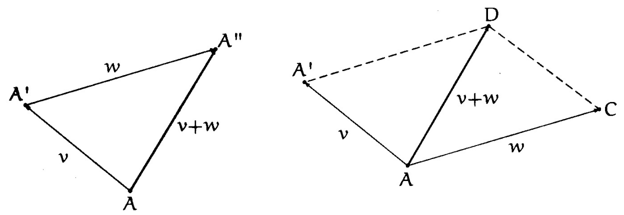


figura 12

Observemos que ambas as definições baseiam-se em percepções geométricas de vetores. No entanto, ao se fixar um sistema de eixos coordenados, podemos estabelecer essa operação a partir das coordenadas dos vetores.

Sabemos que as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OQ}$, coincidem com as coordenadas dos pontos $P = (x, y, z)$ e $Q = (a, b, c)$, respectivamente. Assim indicaremos $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ e afirmamos:

**Afirmação 3** *Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ e $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$, então*

$$v + w = (x + a, y + b, z + c).$$

**Demonstração:**

Consideremos $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ não paralelos, pela segunda definição temos que existe um ponto $R$ do espaço tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OR}$, de modo que $R$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem dois dos seus lados os segmentos $OP$ e $OQ$. Sendo $M$ o ponto médio da diagonal $PQ$ temos

$$M = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}, \frac{z+c}{2}\right),$$

e $M$ é, também, o ponto médio da diagonal $OR$, chamemos $(r, s, t)$ as coordenadas de $R$ e percebamos

$$M = \left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}, \frac{t}{2}\right),$$

do que segue que

$$r = x + a, s = y + b \text{ e } t = z + c$$

No caso em que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são paralelo podemos interpretar a soma como a transposição da extremidade do vetor $\overrightarrow{u}$, por exemplo, pelo vetor $\overrightarrow{v}$, o que nos dá novamente a expressão pretendida.

Utilizamos o fato de que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$ são as somas das coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e se apropriando das propriedades de soma de números reais, obtemos de maneira imediata as propriedades da soma de vetores. Assim consideremos os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$, verificamos as seguintes propriedades para a soma de vetores:

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}$ (comutatividade);
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v})$ (associatividade);
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{u}$, onde $\overrightarrow{O}$ é o vetor nulo (elemento neutro);
- Para todo $\overrightarrow{u}$ existe $-\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ (inverso aditivo).

Podemos ainda considerar $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{w})$, representada por $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ como a diferença entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

### Multiplicação de um vetor por um escalar

A multiplicação entre um vetor $\overrightarrow{v}$ e um número real $\lambda$, dando como resultado o vetor $\lambda \cdot \overrightarrow{v}$ é definida abaixo.

**Definição 15** *Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Se $\lambda = 0$, então $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = 0$. Se $\lambda > 0$, temos $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$, de modo que o sentido positivo de $\overrightarrow{AB}$ seja mantido em $\overrightarrow{AC}$ e*

$$d(A, C) = \lambda \cdot d(A, B).$$

*Para o caso em $\lambda < 0$, temos que $\lambda' = -\lambda$ é positivo e definamos $\lambda' \cdot \overrightarrow{u} = -\lambda \cdot \overrightarrow{u}$ (o inverso aditivo do vetor $\lambda' \cdot \overrightarrow{u}$.)*

Geometricamente esta multiplicação pode causar uma ampliação ou redução do comprimento do vetor multiplicado, caso $\lambda$ tenha módulo maior ou menor que 1, respectivamente. Além disso, se $\lambda$ é positivo o vetor resultante da multiplicação mantém o mesmo sentido do vetor inicial, caso contrário o vetor resultante tem sentido oposto.

Como aconteceu com a soma de vetores, a multiplicação de um vetor por um escalar pode também ser apresentado através das coordenadas de um certo sistema dado. Aqui destacamos novamente que o resultado da operação independe de tal sistema, mas essa visualização do produto facilita a verificação das propriedades dessa multiplicação.

**Afirmação 4** *Fixando no espaço o sistema de eixos coordenados $OXYZ$, seja $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$, então $\lambda \cdot \overrightarrow{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.*

**Demonstração:**

Para verificarmos a validade dessa afirmação, utilizaremos o famoso Teorema de Tales, que garante que toda paralela à base de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.

Tomando $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, com $O$ a origem do sistema e $P = (x, y, z)$. Para $\lambda > 0$, consideremos $\lambda \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$, com $Q = (x', y', z')$, como podemos observar na figura.

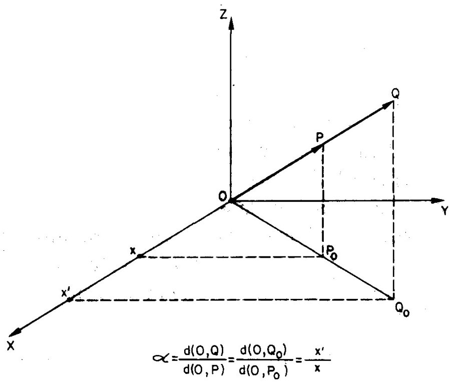


figura 13

Notemos que o triângulo $OQQ_0$, onde $Q_0 = (x', y')$ é a projeção de $Q$ sobre o plano $\pi_{XY}$, cujas coordenadas são obtidas através do sistema $OXY$, é cortado pela reta $PP_0$, onde $P_0 = (x, y)$ é a projeção de $P$ sobre o plano $\pi_{XY}$, que é paralela à base $QQ_0$ do triângulo. Dessa maneira, pelo Teorema de Tales, temos que

$$\frac{d(O,Q)}{d(O,P)} = \frac{d(O,Q_0)}{d(O,P_0)}.$$

Agora consideremos o triângulo $OQ_0Q_1$, sobre o plano $\pi_{XY}$, onde $Q_1 = (x', 0)$ é a projeção de $Q_0$ sobre o eixo $OX$, e tomemos a reta $P_0P_1$ paralela à base $Q_0Q_1$, onde $P_1 = (x, 0)$ é projeção de $P_0$ sobre o eixo $OX$. Novamente, pelo Teorema de Tales, teremos

$$\frac{d(O,Q_0)}{d(O,P_0)} = \frac{d(O,Q_1)}{d(O,P_1)} = \frac{x'}{x}$$

Como $\overrightarrow{OQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}$, temos que $d(O,Q) = \lambda \cdot d(O,P)$, daí

$$\frac{x'}{x} = \frac{d(O,Q)}{d(O,P)} = \lambda$$

donde concluímos que $x' = \lambda x$.
Raciocínios análogos mostram que $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$, implicando que $\lambda \cdot \overrightarrow{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
Agora se $\lambda < 0$, tomemos $\lambda' = -\lambda$ positivo e teremos

$$\lambda \cdot \overrightarrow{v} = -(\lambda' \cdot \overrightarrow{v}) = -(\lambda' x, \lambda' y, \lambda' z) = (-\lambda' x, -\lambda' y, -\lambda' z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Com essa caracterização da multiplicação de um vetor por um escalar através de suas coordenadas podemos verificar as propriedades dessa operação, assim como acontece com a soma. Consideremos $\alpha, \beta$ números reais e $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vetores, a multiplicação de um vetor por um escalar gozam das seguintes propriedades:

- $\alpha \cdot (\beta \cdot \overrightarrow{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \overrightarrow{v}$ (associatividade);
- $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ (elemento neutro);
- $\alpha \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha \cdot \overrightarrow{u} + \alpha \cdot \overrightarrow{v}$ e $(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{v}$ (distributividade).

A partir do exposto, poderemos obter um outra definição.

**Definição 16** *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores tais que exista um número real $\lambda$ de modo que $\overrightarrow{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{u}$, dizemos que $\overrightarrow{v}$* ***é múltiplo de*** *$\overrightarrow{u}$.*

Observemos que se $\lambda \neq 0$, então $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, se e, somente se, $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Muitas vezes se torna conveniente caracterizar a multiplicidade entre vetores por meio de suas coordenadas. Para isso, consideremos o sistema $OXYZ$ e os vetores $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$, com suas coordenadas relativas a este sistema, temos o seguinte teorema:

**Teorema 2** *Dados $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ para que um seja múltiplo do outro é necessário e suficiente que $x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - z_1x_2 = y_1z_2 - z_1x_2 = 0$.*

**Demonstração:**

Se um dos vetores for nulo o resultado é imediato. Agora, sem perda de generalidade fixemos $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$ com $x_1 \neq 0$. Suponhamos as igualdades e ponhamos $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$, portanto $x_2 = \lambda x_1$ e como $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$, temos que $y_2 = \lambda y_1$ e considerando que $x_1z_2 - z_1x_2 = 0$ resulta que $z_2 = \lambda z_1$, logo $\overrightarrow{v_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{v_1}$, mostrando que a condição é suficiente. Reciprocamente, se um dos vetores, digamos $\overrightarrow{v_2}$, é múltiplo do outro. Então sendo $\overrightarrow{v_2} = \lambda \overrightarrow{v_1}$, temos que $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1$ e $z_2 = \lambda z_1$, donde deduzimos que $\lambda x_1 y_2 = \lambda x_2 y_1$, $\lambda x_1 z_2 = \lambda z_1 x_2$, e $\lambda y_1 z_2 = \lambda z_1 x_2$. Se $\lambda \neq 0$ obtemos $x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - z_1x_2 = y_1z_2 - z_1x_2 = 0$. Quando $\lambda = 0$, termos que $x_2 = y_2 = z_2 = 0$

tornado as igualdades óbvias.

Geometricamente, a multiplicidade de um vetor por outro poderá ser entendida como a colinearidade de ambos, como já falamos quando procuramos interpretar a multiplicação de um vetor por um escalar em termos geométricos. Dessa maneira, se um vetor é múltiplo do outro então eles são colineares, ou seja, se $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ temos que os pontos $A, B$ e $C$ estão sobre a mesma reta. E verificamos que a recíproca é verdadeira, pois se existe $\lambda$ tal que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \pm\frac{d(A,C)}{d(A,B)}$ e o sinal $+$ indica que $B$ e $C$ estão do mesmo lado da reta em relação a $A$ e o sinal $-$ , que está em lados opostos. Uma aplicação importante desse fato é exposto no corolário abaixo:

**Corolário 1** *Sejam $A$, $B$ e $C$ três pontos no espaço. Então $A$, $B$ e $C$ são colineares se e, somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares.*

A partir dos conceitos e resultados, expostos até agora relacionando os vetores a um dado sistema de coordenadas podemos determinar as equações paramétricas de uma reta qualquer do espaço, generalizando a expressão que obtivemos para uma reta situada sobre um plano determinado.

**Exemplo 16** *Fixando um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço, dados $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$, pelo corolário acima temos que um ponto $P$ é colinear com $A_1$ e $A_2$, se, e somente se, existe um número real $t$ de modo que $\overrightarrow{A_1P} = t \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$. Utilizando a notação $P = A_1 + \overrightarrow{A_1P}$, e substituindo na igualdade anterior, verificamos que $P$ pertencer à reta $A_1A_2$ equivale a dizer*

$$P = A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1A_2},\ t \in \mathbb{R}.$$

*Como $t$ varia nos números reais o ponto genérico $P$ percorre toda a reta $A_1A_2$, obtendo assim a chamada equação paramétrica da reta. Quando utilizamos o sistema de coordenadas onde $P = (x, y, z)$ temos que*

$$x = a_1 + t(a_2 - a_1), y = b_1 + t(b_2 - b_1) \text{ e } z = c_1 + t(c_2 - c_1.)$$

*Se fizermos a restrição $0 \leq t \leq 1$, obtemos a expressão para o segmento de reta $A_1A_2$.*

O conceito de vetor múltiplo de outro nos fornece embasamento para a seguinte definição:

**Definição 17** *Dados os números reais $\alpha_1, ..., \alpha_n$ e os vetores $\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_n}$, dizemos que o vetor $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + ... + \alpha_n\overrightarrow{v_n}$ é **combinação linear de** $\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_n}$*

E a partir dessa definição podemos formular o teorema abaixo:

**Teorema 3** *Sejam $A$, $B$ e $C$ pontos não-colineares. O ponto $D$ pertença ao plano determinado pelos três pontos dados se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AD}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ou seja, existam números reais $x$ e $y$ tais que*

$$\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}.$$

**Demonstração:**

Inicilamente suponhamos que $D$ pertença ao plano $\pi$ que contem os pontos $A$, $B$ e $C$. Dessa maneira a reta que passa por $D$ e é paralela a reta $AC$ está contida em $\pi$ e como $A$, $B$ e $C$ não são colineares, temos que a reta $AB$ é concorrente com a reta traçada por $D$, determinando o ponto $D_1$. Analogamente, traçamos outra reta passando por $D$, que é paralela a reta $AB$ e corta a reta $AC$ no ponto $D_2$. Agora, tomemos $x$ e $y$ de maneira que $\overrightarrow{AD_1} = x \cdot \overrightarrow{AB}$ e $AD_2 = y \cdot \overrightarrow{AC}$. Notemo que $AD_1DD_2$ da forma que foi construído é um paralelogramo, e daí temos que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2},$$

de outra forma,

$$\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Reciprocamente, suponhamos que essa igualdade é válida e consideremos o sistema de eixos $AXYZ$, com origem no ponto A, escolhido de modo que o plano $\pi_{xy}$ contenha os pontos $B$ e $C$, como na figura abaixo.

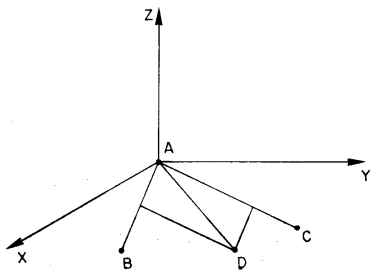


figura 14

Dessa maneira a terceira coordenada dos pontos $B$ e $C$ são nulas e sabemos que $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$, como $A$ é a origem desse sistemas podemos escrever $D = x \cdot B + y \cdot C$, do que decorre que a terceira coordenada de $D$ também é zero, logo $D$ pertence ao plano $\pi_{XY}$ que é determinado pelos pontos $A, B$ e $C$.

Com esse fato podemos determinar a equação paramétrica de um plano do espaço euclidiano.

**Exemplo 17** *Sejam agora $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $A_3 = (a_3, b_3, c_3)$, pontos não colineares no espaço e $\pi$ o plano que os contém como resultado do teorema anterior seque que um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano se, e somente se, existem números reais $s, t$ tais que $\overrightarrow{A_1P} = s \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + t \cdot A_1A_3$, quando utilizamos a notação $B = A + \overrightarrow{AB}$, podemos afirmar que os pontos $P$ do plano $\pi$ são determinados pelos pontos não colineares $A_1$, $A_2$ e $A_3$ pela expressão*

$$P = A_1 + s \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + t \cdot \overrightarrow{A_1A_3}, \ \ s, t \in \mathbb{R}$$

*fazendo $t$ e $s$ variarem entre todos os números reais, essa expressão fornece a chamada equação paramétrica do plano $\pi$. Em termos de coordenadas essa expressão equivale a*

$$x = a_1 + s(a_2 - a_1) + t(a_3 - a_1)$$

$$y = b_1 + s(b_2 - b_1) + t(b_3 - b_1)$$
$$z = c_1 + s(c_2 - c_1) + t(c_3 - c_1).$$

Observemos que enquanto os pontos de uma reta dependem apenas de um parâmetro $t$, os pontos de um plano são descritos por meio de dois parâmetros $s, t$. Isto decorre do fato da reta ter apenas uma dimensão e plano, duas.

Também podemos podemos determinar as coordenadas de um ponto qualquer do espaço, utilizando para isso três vetores, o resultado a respeito desse fato nos fornecerá uma importante definição, a de base do espaço, que terá suas consequência potencializadas quando trabalharmos em espaços cuja dimensão seja maior que 3.

**Teorema 4** *Sejam $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ vetores* ***linearmente independente****, isto é, nenhum é combinação linear dos outros dois. Para todo vetor $\overrightarrow{w}$ do espaço, existe um único terno $(x, y, z)$ de números reais tais que $\overrightarrow{w} = x \cdot \overrightarrow{v_1} + y \cdot \overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3}$.*

**Demonstração:** Sejam $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP}$, como esses vetores não são linearmente dependentes, então em virtude do *teorema 2*, os pontos $A, B, C$ e $D$ não estão sobre o mesmo plano. Tracemos o plano paralelo ao plano $ABC$, passando por $P$, cortando a reta $AD$ no ponto $D'$. Seja $\overrightarrow{AD'} = z \cdot \overrightarrow{AD}$. De maneira análoga, seja $B'$ o ponto onde a reta $AB$ corta o plano que passa por $P$ e é paralelo ao plano $ACD$ e obtemos $\overrightarrow{AB'} = x \cdot \overrightarrow{AB}$. Finalmente, encontremos $C'$ o ponto de interseção entre a reta $AC$ e o plano paralelo a $ABD$ que passa por $P$, donde temos $\overrightarrow{AB'} = y \cdot \overrightarrow{AB}$. As arestas $AB'$, $AC'$ e $AD'$ determinam um paralelepípedo, no qual $P$ é o vértice oposto a $A$

Utilizando a definição da soma de vetores observamos que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}$, ou seja, $\overrightarrow{w} = x \cdot \overrightarrow{v_1} + y \cdot \overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3}$.

Resta provar a unicidade. Suponhamos, por absurdo, que se tenha também

$$\overrightarrow{w} = x' \cdot \overrightarrow{v_1} + y' \cdot \overrightarrow{v_2} + z'\overrightarrow{v_3}, \text{ com } z' \neq z.$$

Assim teríamos

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{w} - \overrightarrow{w} = (x - x') \cdot \overrightarrow{v_1} + (y - y') \cdot \overrightarrow{v_2} + (z - z')\overrightarrow{v_3},$$

donde resultaria que $\overrightarrow{v_3} = \alpha\overrightarrow{v_2} + \beta\overrightarrow{v_1}$, com $\alpha = -\frac{x-x'}{z'-z}$ e $\beta = -\frac{y-y'}{z'-z}$. E dessa maneira, pelo *teorema 2*, o ponto $D$ pertenceria ao plano $ABC$. Analogamente, percebemos que não se pode ter $x \neq x'$ e $y \neq y'$.

Agora passemos a uma importante definição:

**Definição 18** *No $\mathbb{R}^3$, um conjunto de três vetores, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ e $\overrightarrow{a_3}$, não-coplanares, ou seja, linearmente independente, é chamado de* ***base****.*

De acordo com o teorema anterior, qualquer vetor ou cada ponto do espaço tridimensional pode ser expresso como combinação linear dos vetores da base.

Se estivermos considerando um plano desse espaço podemos dizer que uma base para ele se constitui de dois vetores linearmente independentes.

É importante observar que a cada base faz-se uma relação biunívoca com o sistema de coordenadas. A partir da exposição sobre produto interno, detalharemos mais aspectos sobre uma base do $\mathbb{R}^3$.

## 3.7 Produto Interno

O produto interno de dois vetores no espaço euclidianos é definido como um número real, a partir do qual podemos estudar a geometria desse espaço estabelecendo cálculos para se determinar a distância entre dois pontos, o ângulo entre duas retas e, em particular, quando estas são perpendiculares.

A dedução das propriedades do produto interno fica evidente quando esta operação é definida a partir das coordenadas dos vetores em um dado sistema, assim como ocorreu com as propriedades da soma e do produto de um vetor por um escalar. É importante, destacar que o produto interno independe do sistema de coordenadas escolhido.

**Definição 19** *Tomemos o sistema $OXYZ$ no espaço, cujos os vetores $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$. Chamamos de **produto interno** desses vetores ao número*

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

E dessa maneira, dados os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, verificamos imediatamente da definição que o produto interno de vetores goza das seguintes propriedades:

- $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$;
- $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$;
- $\langle \lambda \cdot \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$;
- $\langle \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{0} \rangle = 0$;
- $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \geq 0$ e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$ se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)$, teremos

$$\sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

como visto no *exemplo 8*, esta expressão corresponde a distância $d(O, P)$ entre os pontos $O$ e $P$ e que nos motiva a fazer a seguinte definição

**Definição 20** *O **módulo** ou **norma do vetor** $\overrightarrow{u}$ é o número indicado por*

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle},$$

*que naturalmente corresponde ao comprimento desse vetor.*

Como segmentos equipolentes têm o mesmo comprimento, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ segue que $|\overrightarrow{u}| = d(A, B)$, mostrando que o comprimento de $\overrightarrow{u}$ independe do sistema de eixos coordenados fixados.

**Definição 21** *Quando $|\overrightarrow{u}| = 1$, dizemos que $\overrightarrow{u}$ é um **vetor unitário**.*

**Afirmação 5** *Seja $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ um vetor não-nulo, teremos que $\frac{1}{|\overrightarrow{u}|} \cdot \overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$ é um vetor unitário.*

**Demonstração:**

De fato, sabemos que $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, então

$$\left|\frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right| = \frac{1}{|\overrightarrow{u}|}|\overrightarrow{u}| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

Nossa intensão a partir de agora é mostrar que, apesar de termos definido o produto interno através das coordenadas dos vetores considerados, esta operação independe destas. Para isto, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados que nos auxiliará nesta tarefa.

**Definição 22** *Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores não-nulos. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são **ortogonais** ou **perpendiculares** e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ quando as retas $AB$ e $AC$ são perpendiculares.*

**Lema 1** *Se os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são perpendiculares então $\langle u, v \rangle = 0$.*

**Demonstração:**

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, termos que $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$.

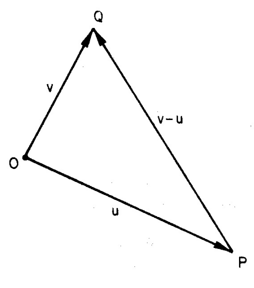


figura 15

Como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são perpendiculares, temos que o segmento $PQ$ é a hipotenusa do triângulo $OPQ$, e pelo Teorema de Pitágoras decorre que

$$d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2,$$

ou seja,

$$|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2.$$

Utilizando a propriedades de produto interno verificamos que

$$|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|^2 = \langle \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \rangle = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 - 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle.$$

E comparando as duas expressões, chegamos a conclusão que $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

**Definição 23** *Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores não-nulos. O **ângulo $\theta$ entre esses vetores** é o menor ângulo entre as semirretas $AB$ e $AC$.*

**Observações 1** *Notemos que quando $\alpha > 0$, temos que o ângulo entre $\alpha \cdot \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o mesmo que o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, já que $\alpha \cdot \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}$ são colineares e têm mesma direção.*

**Teorema 5** *Seja $\theta$ o ângulo entre os vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Temos que*

$$\langle u, v \rangle = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos \theta.$$

**Demonstração:**

Suponhamos, a princípio, que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores unitários. Ponhamos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Consideremos o plano $\pi$ definido por $O$, $A$ e $B$ e tomemos $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OA'}$ um vetor unitário e ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

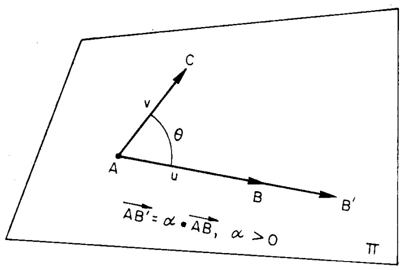


figura 16

Pela figura, utilizando projeções trigonométricas, podemos verificar que

$$\overrightarrow{v} = \cos \theta \cdot \overrightarrow{u} + \sin \theta \cdot \overrightarrow{w},$$

já que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ constituirem uma base para o plano $\pi$.

Agora, façamos o produto interno em ambos os membros da igualdade acima com o vetor $\overrightarrow{u}$. Sendo o vetor $\overrightarrow{u}$ e os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pelo *Lema 1*, obtemos

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \cos \theta.$$

No caso geral, em que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são unitários, definamos $\overrightarrow{u}' = \frac{\overrightarrow{u}}{|u|}$ e $\overrightarrow{v}' = \frac{\overrightarrow{v}}{|v|}$ Então temos que $\overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}| \cdot \overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}| \cdot \overrightarrow{v'}$ e, portanto,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\langle \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'} \rangle$$

Porém, $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são unitários , logo $\langle \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'} \rangle = \cos\theta$, donde temos

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta.$$

Esse teorema nos garante que a recíproca do *Lema 1* é verdadeira.

**Corolário 2** *Se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$, então os vetores não-nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais.*

**Demonstração:**

De fato, como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são não-nulos segue que $|\overrightarrow{u}|$ e $|\overrightarrow{v}|$ são diferentes de zero. Portanto, para se obter $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ devemos ter $\cos\theta = 0$, o que necessariamente implica o ângulo entre os vetores ser $90^0$, ou seja, esses vetores são ortogonais.

Uma outra importante consequência do teorema anterior e a chamada **Desigualdade de Cauchy-Schwartz** que detalharemos na afirmação abaixo:

**Afirmação 6** *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores, então*

$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| \leq |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|,$$

*ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares.*

**Demonstração:**

Utilizando a igualdade $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}||\cos\theta|$ e o fato de que $|\cos\theta| \leq 1$, a desigualdade decorre. Observemos que $|\cos\theta| = 1$ se, e somente se, $\theta = 0^0$ ou $\theta = 180^0$, ou seja, quando $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares.

Façamos, nesse momento, uma definição que nos permitirá relacionar a representação de um vetor em um sistema de eixos ortogonais coordenadas com o produto interno.

**Definição 24** *Dado o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, em cada um dos semi-eixos positivos de $OX$, $OY$ e $OZ$ tomemos pontos $A$, $B$ e $C$, respectivamente, com $d(O,A) = d(O,B) = d(O,C) = 1$. Aos vetores $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OC}$ chamaremos **vetores unitários do sistema** $OXYZ$.*

Agora mostraremos o seguinte resultado.

**Teorema 6** *As coordenadas de um vetor relativamente a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ são os produtos internos desse vetor pelos vetores unitários desses eixos.*

**Demonstração:**

Pelo *Teorema 3*, para qualquer vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ do espaço existem números $x$, $y$ e $z$ tais que $\overrightarrow{v} = x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2} + z \cdot \overrightarrow{e_3}$ e, também, observamos que os coeficientes $x$, $y$ e $z$ desta combinação linear são exatamente as coordenadas do ponto $P$ relativas ao sistema $OXYZ$. Agora, tomemos o produto interno em ambos os membros da igualdade, respectivamente, por $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$, que são unitários e dois a dois ortogonais, obtemos $x = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_1} \rangle$, $y = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_2} \rangle$ e $z = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_3} \rangle$. E a demonstração segue.

# Capítulo 4

# Álgebra Linear

A Álgebra Linear é um ramo da matemática que começou a se desenvolver com a busca de soluções para sistemas de equações lineares e obteve grande êxito conjuntamente com a teoria de determinantes e matrizes. Mais recentemente, inseriu-se nessa área a ideia de espaço vetorial o que potencializou bastante suas aplicações em diversas áreas do conhecimento como Economia, Engenharias e pesquisas relativas à Medicina, por exemplo.

A teoria dos determinantes e matrizes resulta de um longo processo tecno-histórico, pois podemos encontrar vestígios de seus registros iniciais em povos antigos como os babilônios e os chineses. Na antiga Babilônia, enunciados que foram decifrados em tabuletas do período entre 1800 a.C. e 1600 a.C., confirmam que os babilônios resolviam sistemas simples de até duas incógnitas, relacionados a problemas de medições, onde as incógnitas representavam grandezas geométricas como comprimento, largura ou área. Já na China, ainda no século $II$ a.C., era conhecido um algoritmo para a resolução de sistemas lineares, cuja ideia principal é de reduzir uma matriz a sua matriz triangular equivalente, o que atualmente consiste Método de Eliminação de Gauss. Esses são alguns dos motivos que corroboraram a afirmação de BOURBAKI(1999 *apud* DOS SANTOS) de que *"a álgebra linear é um dos ramos mais antigos da matemática."*

Ainda na Idade Média, Leonardo de Pisa, no livro *Liber Abaci* do século $XIII$, apresentava soluções de sistemas de equações lineares, reproduzindo técnicas da Antiguidade. Entre os séculos $XVII$ e $XIX$ o desenvolvimento desse campo matemático foi bastante intenso, já que se aliaram conhecimentos da Álgebra Linear com os da Geometria Analítica.

Os estudos atuais sobre sistemas lineares começaram a ser desenvolvidos em 1678, com Leibnitz. Já o conceito de transformação linear foi bastante divulgado por Gauss a partir do século $XVIII$, em sua obra *Disquisitiones generales cerca superficies curvas*(1827), que resultou de estudos realizados para diversos governos da região onde atualmente se localiza a Alemanha. Neste livro, Gauss estabeleceu representações paramétricas de uma superfície e determinou expressões para o cálculo de distâncias. De acordo com DOS SANTOS (p.25) *"foi nesse contexto que ganharam utilidade as descrições abreviadas de transformações lineares, baseadas em uma notação que se assemelha a que seria usada futuramente para matrizes"*.

No início do $XIX$, podemos dizer que Álgebra Linear se responsabilizava apenas pelos estudos de equações lineares independentemente do número de variáveis. No entanto, os cálculos passaram a ser feitos através de arranjos retangulares com coeficientes da forma $a_{ij}$. Esta representação foi, posteriormente, sistematizada por James Sylvester e Arthur Caley na Teoria das Matrizes.

Atualmente, o estudo da Álgebra Linear se apresenta embasado no conceito de espaço vetorial. No Brasil, consiste em uma disciplina básica para diversos cursos do Ensino Superior das áreas de Tecnologia e Ciências da Natureza, como Física, Matemática e Engenharias, a exemplo do que acontece com a Geometria Analítica. De acordo com COELHO (2007, p.13):

*"Os conceitos envolvidos em Álgebra Linear constituem atualmente ferramentas bastante úteis nas várias áreas da Matemática, quer seja explorando apenas seu aspecto mais algébrico, quer seja levando em conta os aspectos geométricos e topológicos embutidos na teoria. Com isto, ela se torna bastante útil na resolução de sistemas de equações lineares, equações diferenciais, aproximações, interpolações, reconhecimento de quádricas, apenas para citar alguns problemas matemáticos. Conceitos básicos de Álgebra Linear são normalmente ensinados em praticamente todos os cursos de graduação nas áreas de Ciências Exatas e um aprofundamento deles é essencial em muitos desses cursos, especialmente os de Matemática e Física."*

Iremos expor os principais conceitos e resultados referentes ao estudo atual da Álgebra Linear. Destacamos, no entanto, que a linguagem utilizada a partir daqui será bastante formal e diferentemente do capítulo sobre Geometria Analítica, utilizaremos de forma reduzida a interpretação geométrica dos conceitos e resultados.

## 4.1 Espaços Vetoriais

**Definição 25** *Um conjunto $V \neq \emptyset$ é dito **espaço vetorial** sobre um corpo $\mathbb{K}$, ( onde $\mathbb{K}$ representa o corpo dos números reais$\mathbb{R}$ ou dos números complexos$\mathbb{C}$), se existem duas operações denominadas soma e produto por escalar, denotadas por " $+$ " e " $\cdot$ ", respectivamente, tais que*

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (v,u) & \mapsto & v+u \end{array} \qquad \therefore \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (a,v) & \mapsto & av \end{array}$$

*com $v, u \in V$ e $a \in \mathbb{K}$, satisfazendo:*

1. *$u + v = v + u$;*
2. *$(u + v) + w = u + (v + w)$;*
3. *Existe $0 \in V$ tal que $0 + v = v$;*
4. *Para cada $v$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$;*
5. *Para cada $v$, $1 \cdot v = v$, onde $1$ é a unidade de $\mathbb{K}$;*

6. $(ab) \cdot v = a(b \cdot v)$;

7. $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$;

8. $a \cdot (v + u) = a \cdot v + a \cdot u$;

*para todo* $a, b \in \mathbb{K}$ *e todo* $u, v, w \in V$

Podemos observar que esta definição é generalizante, constituindo-se em um conceito essencialmente abstrato, onde qualquer conjunto munido de duas operações que gozem dessas propriedades poderá ser considerado um espaço vetorial. A seguir daremos alguns exemplos deles.

**Exemplo 18** $\mathbb{K}^n = \{(a_1, ..., a_n); a_i \in \mathbb{K}$, *com* $i = 1, ..., n\}$, *munido das operações:*

$$(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n);$$
$$c \cdot (a_1, ..., a_n) = (ca_1, ..., ca_n), \ \text{com } c \in \mathbb{K}.$$

Em particular, quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^n = \{(a_1, ..., a_n); a_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, ..., n\}$, chamado de espaço euclidianos com dois subcasos importantes $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, que como já vimos anteriormente são geometricamente associado ao plano e ao espaço, respectivamente.

**Exemplo 19** $M_{\mathbb{K}}(m, n) = \{$*matrizes* $m \times n$, *com* $a_{ij} \in \mathbb{K}$ *com* $i = 1, ..., m$ *e* $j = 1, ..., n\}$, *onde* $m, n \in \mathbb{N}$ *e*

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*com as operações*

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$c \cdot (a_{ij}) = (ca_{ij}), \ \text{com } c \in \mathbb{K},$$

*possui a estrutura de um espaço vetorial.*

**Exemplo 20** *Seja* $X \neq \emptyset$ *definimos*

$$\mathfrak{F}(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ é uma função}\}$$

*munindo com as operações:*

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x); x \in X$ *e* $f, g \in \mathfrak{F}(X, \mathbb{K})$;
- $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$, *com* $a \in \mathbb{K}$ *e* $f \in \mathfrak{F}(X, \mathbb{K})$;

*é um espaço vetorial.*

A partir do conceito de espaço vetorial podemos definir vetor de maneira mais genérica que contexto da Geometria Analítica.

**Definição 26** *Um **vetor** é um elemento qualquer de um espaço vetorial.*

Esta definição é naturalmente uma generalização da definição geométrica anterior, pois os vetores considerados como segmentos equipolentes também satisfazem as condições dessa definição já que sabemos que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são espaços vetoriais. No entanto, podemos considerar, por exemplo, matrizes e funções como vetores.

Outro importante conceito da Álgebra Linear é:

**Definição 27** *Um **subespaço vetorial** $W$ de um espaço vetorial $V$ é um subconjunto de $V$ tal que:*

1. $0 \in W$;
2. $u + v \in W$, *para todo* $u, v \in W$;
3. $a \cdot v \in W$, *para todo* $a \in \mathbb{K}$, *para todo* $v \in W$.

Percebamos que um subespaço vetorial $W \subset V$ é, em si, um espaço vetorial e como tal possui seus subespaços vetoriais. Agora, poderemos identificar alguns subespaços dos espaços vetoriais exemplificados anteriormente.

**Exemplo 21** *Os subespaços do $\mathbb{R}^2$ são $\{(0,0)\}$, as retas que passam por $(0,0)$ e o próprio $\mathbb{R}^2$.*

**Exemplo 22** *Os subespaços do $\mathbb{R}^3$ são$\{(0,0,0)\}$, as retas que passam pelo $(0,0,0)$, os planos que passam pela origem e o próprio $\mathbb{R}^3$.*

**Exemplo 23** $S = \{A \in M_{\mathbb{K}}(n,n); (a_{ij}) = (a_{ji})\}$ *denominado conjunto das matrizes simétricas é um subespaço das matrizes quadradas $n \times n$, pois:*

- $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \in S$;
- *Sendo $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ pertencentes a $S$, então:* $A + B = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (c_{ji})$, *daí $A + B \in S$;*
- *E dado $A \in S$ e $c \in \mathbb{K}$ teremos:* $c \cdot A = (d_{ij}) = (ca_{ij}) = c(a_{ij}) = c \cdot (a_{ji}) = (ca_{ji}) = (d_{ji})$, *daí $c \cdot (A) \in S$.*

**Exemplo 24** *Seja $X \neq \emptyset$, tomemos*

$$L = \{f \in \mathfrak{F}(X, \mathbb{R}); |f(x)| \leq c, \text{ para todo } x \in X \text{ e para algum } c \in \mathbb{R}_+\},$$

*denominado conjunto das funções limitadas, onde $\mathbb{R}_+$, representa o conjunto dos números reais não negativos. Então,*

- *A função nula é o zero do espaço vetorial $\mathfrak{F}(X, \mathbb{R})$, sendo limitada com $c = 0$ pertence a $L$;*

- *Sejam* $f, g \in L$, *daí existem* $c$ *e* $d$ *em* $\mathbb{R}_+$ *tais que* $|f(x)| \leq c$ *e* $|g(x)| \leq d$, *logo* $|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq c + d \in \mathbb{R}_+$, *assim* $(f+g)(x) \in L$;
- *E sendo* $f \in L$ *e* $a \in \mathbb{R}$, *temos* $|(a \cdot f)(x)| = |a \cdot f(x)| = |a| \cdot |f(x)| \leq |a| \cdot c = m \in \mathbb{R}_+$, *daí* $(a \cdot f)(x) \in L$.

*Portanto,* $L$ *é um subespaço de* $\mathfrak{F}(X, \mathbb{R})$.

Relembrando a definição de combinação linear vista ainda quando abordávamos os conceitos relativos à Geometria Analítica, podemos fazer a seguinte generalização:

**Definição 28** *Seja* $V$ *um espaço vetorial e* $v_1, ..., v_n$ *vetores de* $V$. *Uma* ***combinação linear*** *de* $v_1, ..., v_n$ *é expressa por*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 \cdot v_1 + ... + a_n \cdot v_n, \text{ com } a_i \in \mathbb{K}, \text{ para } i = 1, ..., n.$$

Dessa forma, se $W \subset V$ é um subespaço vetorial e $v_1, ..., v_n \in W$, então por definição verificamos que a combinação linear desses vetores está em $W$. Este fato nos auxilia na definição a seguir.

**Definição 29** *Sejam* $W \subset V$ *um subespaço vetorial e* $v_1, ..., v_n \in W$, *dizemos que* $v_1, ..., v_n$ *são* ***geradores*** *de* $W$ *se, e somente se, todo* $v \in W$ *puder ser escrito como combinação linear de* $v_1, ..., v_n$.

Neste caso, escrevemos

$$W = [v_1, ..., v_n] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} = a_1 \cdot v_1 + ... + a_n \cdot v_n, \text{ com } a_i \in \mathbb{K}, \text{ para } i = 1, ..., n. \right\}$$

**Exemplo 25** *Se tomarmos* $W \subset \mathbb{R}^4$ *de modo que*

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x = y + z, w = -z\}.$$

*Verificamos que* $W$ *é subespaço de* $\mathbb{R}^4$ *e que* $v \in W$ *se, e somente se,* $v = (y+z, y, z, -z) = (y, y, 0, 0) + (z, 0, z, -z) = y \cdot (1, 1, 0, 0) + z \cdot (1, 0, 1, -1)$. *Logo* $W = [(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -1)]$.

Vale salientar que a lista de geradores pode ser infinita, no entanto, a combinação linear requer um número finito de vetores geradores.

**Exemplo 26** *Fixados* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, *consideremos*

$$H(a_1, ..., a_n) = \left\{ (x_1, ..., x_n); \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

*denominado hiperplano associado a* $a_1, ..., a_n$.
*No caso em que* $a_i = 0$, *para todo* $i = 1, ..., n$, *então* $H(0, ..., 0) = \mathbb{R}^n$., *pois se* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *temos que* $x \in H(0, ..., 0)$.

*Se, digamos, $a_n \neq 0$ verificamos que $H(a_1, ..., a_n)$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Podemos calcular os geradores de $H(a_1, ..., a_n)$.*

*Tomemos $x = (x_1, ..., x_2) \in H(a_1, ..., a_n)$, assim*

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0,$$

*Agora, definamos*

$$b_i = \frac{a_i}{a_n}, \text{ para } i = 1, ..., n-1,$$

*logo*

$$x_n = -b_1x_1 + ... + (-b_{n-1}x_{n-1}).$$

*Então,*

$$(x_1, .., x_{n-1}, x_n) = (x_1, .., x_{n-1}, -b_1x_1 + ... + (-b_{n-1}x_{n-1})) =$$

$$x_1(1, 0, 0, ..., -b_1) + x_2(0, 1, 0, ..., -b_2) + ... + x_{n-1}(0, 0, 0, ..., 1, -b_{n-1}),$$

*daí $H(a_1, ..., a_n) = [(1, 0, 0, ..., -b_1), (0, 1, 0, ..., -b_2), ...(0, 0, 0, ..., 1, -b_{n-1})]$.*

Veremos agora alguns resultados relacionados aos conceitos e exemplos apresentados.

**Proposição 3** *Sejam $V$ um espaço vetorial e $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de subespaços de $V$, onde $A$ é um conjunto qualquer de índices. Então $\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$ é um subespaço vetorial de $V$.*

**Demonstração:**

- Se $0 \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, então $0 \in \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$;
- Tomemos $u, v \in \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$, daí $u \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$ e $v \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, então $u + v \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Assim, $u + v \in \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$;
- Sejam $v \in \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$ e $a \in \mathbb{K}$, portanto $av \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, logo $av \in \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$.

Assim, $\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$ é um subespaço de $V$.

**Corolário 3** *O conjunto solução de um sistema linear homogênio, com $n$ variáveis, é um espaço vetorial de $\mathbb{K}^n$.*

**Demonstração:** De fato, dizer que $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma solução de um sistema homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1} & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

significa que $(y_1, ..., y_n) \in H(a_{11}, ..., a_{1n}) \cap ... \cap H(a_{m1}, ..., a_{mn})$, uma interseção de subespaços de $\mathbb{R}^n$.

Uma observação importante a se fazer é que no caso em que o espaço vetorial é o $\mathbb{R}^3$, os hiperplanos correspondem aos planos que têm a origem como um de seus pontos. E a solução pode também ser interpretada geometricamente.

Utilizando conceitos já vistos podemos definir a soma de dois subespaços vetoriais e verificar alguns resultados relativos a este conceito.

**Definição 30** *Sejam $V$ um espaço vetorial e $U, W \subset V$ subespaço de $V$, chamamos de **Soma de** $U$ **e** $W$ o conjunto*

$$U + W = \{u + w; u \in U \ \ e \ w \in W\}.$$

*Notemos que $U+W$ é um subespaço vetorial de $V$, ao qual chamaremos de **espaço soma** $U+W$.*

**Proposição 4** *Se $U = [u_1, ..., u_n]$ e $W = [w_1, ..., w_m]$, então $U + W = [u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m]$.*

**Demonstração:**

Tomemos $v \in U + W$, devemos mostrar que $v$ se escreve como combinação linear de $u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m$ , daí $v = u + v$ com $u \in U$ e $v \in V$. Como, $u \in U$ segue que $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$. Analogamente, como $w \in W$ temos que $w = \sum_{j=1}^{n} b_j w_j$. Portanto, $v = u + w = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j w_j$ e o resultado segue.

**Exemplo 27** *Sejam $U, W \subset P_4 = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \ com \ a_i \in \mathbb{K}, \ para \ i = 0, ..., 4\}$, onde:*

$$U = \{ax^2 + (a-b)x^3 - (b-c)x^4, \ com \ a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

*e*

$$W = [2, 1 - x, x^3 - x^4].$$

*Primeiramente, devemos verificar se $U$ é subespaço de $P_4$.*

- *O polinômio nulo pertence a $U$, basta tomar $a = b = c = 0 \in \mathbb{K}$;*
- *Tomemos $p, q \in U$, com $p = ax^2+(a-b)x^3-(b-c)x^4$ e $q = dx^2+(d-e)x^3-(e-f)x^4$, daí*

$$\begin{aligned} p + q &= ax^2 + (a-b)x^3 - (b-c)x^4 + dx^2 + (d-e)x^3 - (e-f)x^4 \\ &= (a+d)x^2 + (a+d-b-e)x^3 - (b+e-c-f)x^4, \end{aligned}$$

  *tomando $g = a + d, h = b + e$ e $i = c + f$, verificamos que $p + q = gx^2 + (g-h)x^3 - (h-i)x^4$, portanto, $p + q \in U$.*
- *E se tomando $p \in U$como definido no item anterior e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que*

$$\lambda \cdot p = \lambda \cdot (ax^2 + (a-b)x^3 - (b-c)x^4) = \lambda ax^2 + (\lambda a - \lambda b)x^3 - (\lambda b - \lambda c)x^4,$$

  *logo $\lambda \cdot p \in U$.*

  *Comprovando que $U$ é um subespaço de $P_4$.*

*Agora, procuremos geradores para $U$. Dado $p \in U$, dessa forma $p = ax^2 + (a-b)x^3 - (b-c)x^4 = a(x^2+x^3)+b(-x^3-x^4)+cx^4$, daí concluímos que $U = [x^2+x^3, -x^3-x^4, x^4]$. Então aplicando a proposição anterior temos que $U+W = [x^2+x^3, -x^3-x^4, x^4, 2, 1-x, x^3-x^4]$.*

Se fizermos uma restrição em relação a interseção $U$ e $W$ subespaços de $V$, teremos uma nova definição em relação ao subespaço soma $U + W$.

**Definição 31** *Sejam $V$ um espaço vetorial e $U, W \subset V$ subespaços vetoriais de $V$. Se $U \cap W = \{0\}$ o subespaço soma $U + W$, será denotado por $U \oplus W$ e é chamado* ***soma direta de $U$ e $W$.***

**Exemplo 28** *Comecemos considerando uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que $f$ é uma* ***função par*** *quando $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Quando $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ dizemos que $f$ é uma* ***função ímpar****. Agora, considerando o espaço vetorial*

$$\mathfrak{f}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\},$$

*munido das operações usuais de funções, verificamos que $\mathfrak{f}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pode ser escrito como soma direta de $W_1 = \{f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ é par}\}$ e $W_2 = \{f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ é ímpar}\}$.*
*Primeiramente, observemos que $W_1$ e $W_2$ são subespaços de $\mathfrak{f}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e ainda que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, onde $0$ representa aqui a função nula.*
*Agora, escrevamos*

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

*Observamos que definindo $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, temos que $g$ é uma função par e $h$ é um função ímpar. Portanto, cada elemento de $\mathfrak{f}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pode ser escrito como soma de elementos de $W_1$ e $W_2$. E o resultado segue.*

No contexto da Álgebra Linear podemos, também, nos apropriar do conceito de dependência linear, já visto quando tratamos da Geometria Analítica.

**Definição 32** *Seja $V$ um espaço vetorial, $S \subset V$, com $S$ não-vazio. $S$ é dito* ***linearmente independente*** *(L.I.) se, sempre que, $a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$, com $v_1, ..., v_n \in S$ e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$, tivermos $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. Em outras palavras, nenhum vetor de $S$ é combinação linear de outros vetores de $S$. Dizemos, ainda, que $S$ é* ***linearmente dependente*** *(L.D.), quando não for L.I.*

Observemos que $0 \in S$, então esse conjunto é necessariamente L.D., pois $0 = \alpha \cdot 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Passemos a uma definição mais abrangente do que a dada no contexto da Geometria Analítica.

**Definição 33** *Sejam $V$ um espaço vetorial e $\beta \subset V$, um subconjunto não-vazio, é dito uma* ***base de $V$*** *se:*

- *$\beta$ é L.I.;*

- *$\beta$ gera $V$, isto é, todo $v \in V$ se escreve da forma $\sum_{i=1}^{n} a_1 v_i$, com $a_i \in \mathbb{K}$ e $v_i \in \beta$.*

Quando a base é um conjunto finito temos uma base finita, caso contrário temos uma base infinita.

Como se verá ao longo da exposição sobre alguns tópicos de Álgebra Linear, este conceito é uma ferramenta bastante útil para se caracterizar espaços vetoriais. Comecemos com o seguinte resultado.

**Teorema 7** *Se $m$ vetores geram um espaço vetorial $V$, então qualquer conjunto contendo $n > m$ vetores é L.D.*

**Demonstração:**

Escrevamos $V = [v_1, ..., v_m]$. Sejam $w_1, ..., w_n \in V$, para cada $j \in \{1, ..., n\}$ temos

$$w_j = a_{ij} v_i + ... + a_{mj} v_m \text{ com } a_{ij} \in \mathbb{K}, \text{ onde } i = 1, ..., m.$$

Consideremos o sistema linear homogêneo sobre as variáveis $x_1, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & ... & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & ... & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & ... & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & ... & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Como $n > m$ (o número de equações é menor que o número de variáveis) temos que este sistema admite uma solução diferente de $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, ou seja, existe $(y_1, ..., y_n) \neq (0, ..., 0)$ satisfazendo este sistema. Escrevendo

$$(a_{11}y_1 + ... + a_1ny_n) \cdot v_1 + ... + (a_{m1}y_1 + ... + a_{mn}y_n) \cdot v_m = 0_V;$$

$$y_1(a_{11}v_1 + ... + a_1nv_m) + ... + y_n(a_{m1}v_1 + ... + a_{mn}v_m) = 0_V;$$

$$y_1 \cdot w_1 + ... + y_n w_n = 0_V.$$

Como algum $y_i \neq 0$, então temos que $\{w_1, ..., w_n\}$ é L.D.

Um resultado imediato desse teorema nos garante a unicidade do número de elementos de uma base finita para um espaço vetorial.

**Corolário 4** *Se $V$ possui uma base finita com $n$ elementos, então qualquer outra base também possuirá $n$ vetores.*

**Demonstração:**

Seja $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de $V$. Se $\beta' = \{w_1, ..., w_m\}$ outra base de $V$. Como $\beta$ gera $V$ e $\beta'$ é L.I., temos que $m \leq n$. Reciprocamente, como $\beta$ é L.I. e $\beta'$ gera $V$, segue que $m \geq n$ e dessa forma, temos que $m = n$.

Logo faz sentido definir dimensão de um espaço vetorial com base finita.

**Definição 34** *Se $V$ admite base finita $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$, então o número $n$ é dito **dimensão** de $V$, e será denotado por $n = dimV$.*

**Exemplo 29** *No $\mathbb{R}^3$ temos que qualquer conjunto de três vetores L.I. geram o espaço euclidiano, e por isso dizemos que este é um espaço tridimensional. Quando estamos nos limitando ao plano, necessitamos apenas de dois vetores linearmente independentes para gerá-lo e, portanto, temos um espaço bidimensional. Já ao nos referirmos à reta, precisamos apenas de um vetor para gerá-la, basta lembrar da equação paramétrica da reta, e dessa forma, temos um espaço unidimensional.*

Uma convenção é considerar a dimensão do espaço $\{0\}$ igual a zero. Outra consideração, que faremos no contexto da Álgebra Linear é a de trabalharmos apenas com espaços vetoriais com dimensões finitas a menos que façamos menção explicitamente.

A seguir elencaremos algumas propriedades básica em relação à dependência linear.

Seja $V$ um espaço vetorial.

**Afirmação 7** *Seja $S \subset V$ L.I. Se $S' \subset S$ então $S'$ é L.I;*

**Demonstração:**

Supondo, por absurdo, que $S'$ é L.D., então existiria $v \in S'$ que poderia ser escrito como combinação linear de elementos de $S'$. Mas como $S' \subset S$, teríamos que existe $v \in S$ tal que $v$ se escreve como combinação linear de elementos de $S$. Logo, $S$ é L.D. Contrariando a hipótese.

**Afirmação 8** *Se $S \subset V$ L.D. e $S \subset S'$, então $S'$ é L.D.*

**Demonstração:**

Como $S$ é L.D. Tomemos $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, com $v_i \in S$ e $a_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, ..., n$, com algum $a_i \neq 0$ e como $S \subset S'$, temos que $v \in S'$ e o resultado segue.

**Afirmação 9** *Se $v_1, ..., v_n$ geram $V$, então podemos extrair do conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base para $V$.*

**Demonstração:**

Se $S = \{v_1, ..., v_n\}$ é L.I., nada há o que mostrar. Se $S$ é L.D., então podemos escrever, por exemplo, $v_n = a_1v_1 + ... + a_{n-1}v_{n-1}$ e teremos $S' = \{v_1, ..., v_{n-1}\}$, se for L.I., teremos nossa base, caso contrário, procedamos de maneira análoga, obtemos $S'' = \{v_1, ..., v_{n-2}\}$ e, novamente, se for L.I. encontramos nossa base. Caso contrário, podemos usar o mesmo argumento um número finito de vezes até obtermos um conjunto L.I., que gerará o espaço $V$ e, portanto, será uma base para este espaço.

**Afirmação 10** *Todo $S \subset V$ L.I. pode ser completado a uma base de $V$.*

**Demonstração:**

Se $S$ gera $V$ nada há o que demonstrar. Se $S$ não gera $V$ então existe $v_{n+1} \notin [v_1, ..., v_n]$, logo $S' = \{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\}$ é L.I. Se $S'$ gera $V$ então atingimos nosso objetivo, caso contrário repetimos o argumento um número finito de vezes até encontrar um conjunto $\beta$ que é L.I. e gera $V$.

**Afirmação 11** *Seja $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$, com $dimV = n$. Então $\{v_1, ..., v_n\}$ é L.I. se, e somente se, $V = [v_1, ..., v_n]$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$)Supondo, por absurdo que existisse $S = \{v_1, ..., v_n\}$ um subconjunto L.I. de $V$ que não o gerasse, então existiria um $v_{n+1} \notin [v_1, ..., v_n]$, de modo que $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\}$ seria L.I., e portanto teríamos um conjunto L.I. com cardinalidade maior que $dimV$, que é uma contradição.
($\Leftarrow$) Seja $V = [v_1, ..., v_n]$, supondo, por absurdo, que $S = \{v_1, ..., v_n\}$ é L.D. então poderiamos extrair uma base de $S$ para $V$ e teríamos $dimV < n$ (contradição).

**Afirmação 12** *Seja $W \subset V$ subespaço vetorial de $V$, se $dimW = dimV$, então $W = V$.*

**Demonstração:**

Seja $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de $W$, portanto é um conjunto L.I de $V$ com $n$ elementos, logo $V = [v_1, ..., v_n]$ e segue que $W = V$.

Exemplificaremos bases de alguns espaços vetoriais de dimensão finita que já foram expostos até o momento.

**Exemplo 30** *Em $V = \mathbb{K}^n$, tomemos $u_i = (0, ..., b_i, ..., 0)$, onde $b_i \neq 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Então dado $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ temos que:*

$$(x_1, ..., x_n) = \frac{x_1}{b_1}u_1 + ... + \frac{x_n}{b_n}u_n,$$

*e segue que $\mathbb{K}^n = [u_1, ..., u_n]$.*
*Agora tomemos a igualdade*

$$y_1u_1 + ... + y_nu_n = (0, 0, ..., 0, 0).$$

*Verificamos que $y_ib_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$, donde $y_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Portanto, $\{u_1, ..., u_n\}$ é L.I. Logo $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base para $\mathbb{K}^n$ e, consequentemente, $dim\mathbb{K}^n = n$. No caso em que $b_i = 1$ de $\mathbb{K}$ para todo $i = 1, ..., n$, denotamos por $u_i = e_i$ e temos que $\{e_1, ..., e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{K}^n$.*

**Exemplo 31** *Seja $V = M_{\mathbb{K}}(m, n)$. Definamos $A^{(r,s)} \in V$, onde $r = 1, 2, ..., mn$ e $s = 1, ..., mn$ de modo que $A^{(r,s)} = (a_{ij}^{rs})$, onde*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad r = i \ e \ s = j; \\ 0, & se \quad s \neq i \ ou \ s \neq j. \end{cases}$$

*Verificamos de maneira análoga ao exemplo anterior que* $\{A^{(r,s)}\}$ *com* $r = 1, 2, ..., mn$ *e* $s = 1, ..., mn$ *é uma base de* $V$*, e temos que* $dim M_{\mathbb{K}}(m, n) = mn$.

**Exemplo 32** *Tomando* $V = P_n$*, temos que* $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é uma base para* $P_n$*, donde segue que* $dim P_n = n + 1$.

O resultado a seguir procura explorar o conceito de dimensão.

**Teorema 8** *Sejam* $W, U \subset V$ *subespaços vetoriais. Então*

$$dim(W + V) = dim W + dim U - dim(W \cap U).$$

**Demonstração:**

Sejam $\beta = \{v_1, ..., v_k\}$ uma de $W \cap U$, donde $dim(W \cap U) = k$, com o que já vimos $\beta$ pode ser completada a bases:
$\beta' = \{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_n\}$ de $W$, com $dim W = k + n$ e
$\beta'' = \{v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_m\}$ de $U$, com $dim U = k + m$.

Assim $W + U = [v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_n, u_1, ..., u_m]$.

Mostremos que $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_n, u_1, ..., u_m\}$ é L.I.

$$\sum_{i=1}^{k} x_i v_i + \sum_{j=1}^{n} y_j w_j + \sum_{s=1}^{m} y_s u_s = 0. \tag{4.1}$$

Tomemos $u = \sum_{s=1}^{m} y_s u_s = \sum_{i=1}^{k} (-x_i) v_i + \sum_{j=1}^{n} (-y_j) w_j \in W \cap U$, pois é ao mesmo tempo combinação linear de $\beta'$ e $\beta''$. Portanto existem $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{s=1}^{m} y_s u_s = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \Rightarrow \sum_{s=1}^{m} z_s u_s + \sum_{i=1}^{k} (-\lambda_i) v_i = 0.$$

Dessa forma, temos uma combinação linear de elementos de $\beta$", que é L.I. e, portanto, seque que $y_s = 0$, para todo $s = 1, ...m$. Retornando (4.1), temos

$$\sum_{i=1}^{k} x_i v_i + \sum_{j=1}^{n} y_j w_j = 0.$$

Mas sabemos que $\beta'$ é L.I. e temos que $x_i = 0$ para todo $i = 1, ..., k$ e $y_j = 0$ para todo $j = 1, ..., n$. Portanto, $\beta' \cup \beta''$ é base $W + U$, e daí $dim(W + U) = k + m + n$.

Percebamos que $dim W + dim U - dim(U \cup W) = k + n + k + m - k = k + m + n$ e o resultado segue.

**Corolário 5** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial,* $W, U \subset V$ *subespaços de* $V$ *e* $S = W \oplus U$*, então* $dim S = dim W + dim U$.

**Demonstração:** Basta usar o fato de que $W \cap U = \{0\}$, que tem dimensão nula.

## 4.2 Transformações Lineares

Agora apresentaremos um conceito bastante importante em Álgebra Linear.

**Definição 35** *Sejam $V, W$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação linear $T : V \to W$ é dita **transformação linear** (T.L.) se para todos $u, v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$ valem*

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$;
- $T(av) = aT(v)$.

*ou equivalentemente,*

$$T(v + au) = T(v) + aT(u)$$

Segue da definição que $T(0_V) = 0_W$. Quando $V = W$ denominamos a transformação linear de **Operador Linear.**

**Exemplo 33** *Seja $V$ um espaço vetorial e a identidade*

$$\begin{array}{rccc} Id: & V & \to & V \\ & v & \mapsto & v \end{array}$$

*para todo $x \in V$. $Id$ é um operador linear.*

**Exemplo 34** *Seja $V = M_{\mathbb{K}}(m, n)$. Fixando as matrizes $A \in M_{\mathbb{K}}(m, m)$ e $B \in M_{\mathbb{K}}(n, n)$. Definamos $T : V \to V$ por*

$$T(X) = AXB$$

*Observemos que*

- $T(X + Y) = A(X + Y)B = (AX + AY)B = AXB + AYB = T(X) + T(Y)$;
- $T(aX) = A(aX)B = aAXB = aT(X)$.

*Portanto, $T$ é um operador linear.*

Os resultados a seguir nos ajudarão a compreender as relações entre espaços vetoriais a partir de transformações lineares.

**Teorema 9** *Sejam $V, W$ espaços vetoriais, $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de $V$ e $\{w_1, ..., w_n\}$ um subconjunto qualquer de $W$. Então existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, ..., n$.*

**Demonstração:**

Dado $v \in V$, queremos definir $T(v) \in W$ satisfazendo ao requerido. Como $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de $V$, existem $a_1, ..., a_n$ unicamente determinados em $\mathbb{K}$ tais que $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, então fica bem definida a aplicação $T : V \to W$ por

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} a_iw_i.$$

Agora observemos que

- $T$ é linear, pois dados $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ e $u = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ e $a \in \mathbb{K}$, então

$$T(v + au) = T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + a \sum_{i=1}^{n} b_i v_i) = T(\sum_{i=1}^{n} (a_i + ab_i) v_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + ab_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} ab_i w_i = T(v) + aT(u);$$

- $T$ satisfaz $T(v_i) = w_i$, pois $v_i = 0 \cdot v_1 + ...0 \cdot v_{i-1} + v_i + 0 \cdot v_{i+1} + ... + 0 \cdot v_n$, de modo que $T(v_i) = 0 \cdot w_1 + ...0 \cdot w_{i-1} + w_i + 0 \cdot w_{i+1} + ... + 0 \cdot w_n = w_i$ para todo $i = 1, ..., n$.

- E finalmente, mostremos a unicidade de $T$. Suponha que exista $S : V \to W$ uma T.L. tal que $S(v_i) = w_i$, para todo $i = 1, ..., n$. Tomemos $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$, então

$$S(v) = S(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i S(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = T(v),$$

  logo $S = T$.

**Definição 36** ***O núcleo de uma transformação linear*** *$T : V \to N$ é subconjunto $N(T) = \{v \in V ; T(v) = 0_W\}$.*

Observemos que $N(T)$ é um subespaço vetorial de $V$.

**Proposição 5** *Uma transformação linear $T :\to W$ é injetiva se, e somente se, $N(T) = \{0_V\}$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Suponhamos $T$ injetiva.Tomemos $v \in N(T)$, então $T(v) = 0_W = T(0_V)$ e pela injetividade de $T$ segue que $v = 0_V$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $N(T) = \{0_V\}$. Sejam $v, u \in V$ tais que $T(v) = T(u)$, então $T(v) - T(u) = 0_W$, e pela linearidade de $T$, temos que $T(v - u) = 0_W$ e, portanto, $v - u = 0_V$. Do que segue que $v = w$, demonstrando a injetividade de $T$.

**Proposição 6** *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, então $T$ é injetiva se, e somente se, $\{T(v_1), ..., T(v_n)\} \subset W$ é L.I, para qualquer $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ L.I.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Queremos mostrar que $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ é L.I, dessa forma tomaremos $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ L.I. e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = 0_W$, então $T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = 0_W$. Daí $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in N(T) = \{0_V\}$, pois $T$, por hipótese é injetiva. Assim, $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0_V$, e daí $a_i = 0$ para $i = 1, ..., n,$, pois $\{v_1, ..., v_n\}$ é L.I. e o resultado segue.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $T$ leva conjuntos L.I de $V$ em conjuntos L.I. de $W$. Seja $v \in V$ com $v \neq 0_V$. Daí $\{v\}$ é L.I. e temos que $\{T(v)\}$ é L.I., e portanto $T(v) \neq 0_W$.

**Definição 37** *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Definimos a imagem de $T$ como*

$$Im(T) = T(V) = \{T(v); v \in V\} \subset W.$$

É importante salientar que $Im(T)$ é subespaço vetorial de $W$.

Usualmente denotamos $Posto(T) = dim Im(T)$.

**Proposição 7** *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. $T$ é sobrejetiva se, e somente se $W = [T(v_1), ..., T(v_n)]$ sempre que $V = [v_1, ..., v_n]$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Supondo $T$ sobrejetiva, $V = [v_1, ..., v_n]$ e $w \in W$, então $w = T(v)$ para algum $v \in V$. Assim, $w = T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i)$, e segue que $W = [T(v_1), ..., T(v_n)]$.

($\Leftarrow$) Supondo que para $V = [v_1, ..., v_n]$ implique que $W = [T(v_1), ..., T(v_n)]$. Tomemos $w \in W$ então $w = \sum_{i=1}^{n} b_i T(v_i) = T(\sum_{i=1}^{n} b_i v_i)$, de modo que temos $w = T(v)$, onde $v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \in V$. Portanto $T$ é sobrejetiva.

Tudo que expomos até agora sobre transformação linear servirá para provarmos o importante resultado abaixo.

**Teorema 10** ***(Teorema do núcleo e imagem)***

*Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, então $dimV = dimN(T) + dimIm(T)$.*

**Demonstração:**

Seja $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base $N(T)$, completemos-a a uma base $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_m\}$ de $V$. Mostraremos que $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ é uma base de $Im(T)$.
Primeiramente mostremos que $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ gera $Im(T)$.
Seja $w \in Im(T)$, então $w = T(v)$, com $v \in V$. E sendo $v = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$, temos que $w = \sum_{i=1}^{m} a_i T(v_i)$, mas como $v_i \in N(T)$ para $i = 1, ..., n$, segue que $w = \sum_{i=n+1}^{m} a_i T(v_i) \in \{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$. Portanto, $Im(T) = [T(v_{n+1}), ..., T(v_m)]$.
Resta mostrar que $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ é L.I.
Tomemos $a_{n+1}, ..., a_m \in \mathbb{K}$, de modo que $\sum_{i=1+n}^{m} a_i T(v_i) = 0_W$. Daí, $T(\sum_{i=1+n}^{m} a_i v_i) = 0_W$ e segue que $u = \sum_{i=1+n}^{m} a_i v_i \in N(T)$ e, portanto, $u = \sum_{i=1}^{n} b_i(v_i)$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(v_i) = \sum_{i=1+n}^{m} a_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i(v_i) - \sum_{i=1+n}^{m} a_i v_i = 0_V,$$

como $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_m\}$ é L.I. temos que $a_i = 0$ para $i = n+1, ..., m$ e $b_i = 0$ para $i = 1, ..., n$. E segue que $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ é L.I.
Portanto $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ é base de $Im(T)$. Assim:

$$dimN(T) + dimIm(T) = n + (m - n) = m = dimV.$$

A partir desse momento iremos apresentar definições e resultados que contribuirão para caracterizar os espaços vetoriais por meio de transformações lineares, particularmente através de sua representação matricial.

Sejam $V, W$ espaços vetoriais. Definamos $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W; T \text{ é linear}\}$ e consideremos as operações:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(V,W) \times \mathcal{L}(V,W) & \to & \mathcal{L}(V,W) \\ (T,S) & \mapsto & T+S \\ (T+S)(v) & = & T(v)+S(v), \quad \forall v \in V. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathcal{L}(V,W) & \to & \mathcal{L}(V,W) \\ (a,T) & \mapsto & aT \\ (aT)(v) & = & aT(v), \quad \forall v \in V \text{ e } a \in \mathbb{K}. \end{array}$$

Com estas operações $\mathcal{L}(V, W)$ torna-se naturalmente um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Quando temos um operador linear usamos a notação $\mathcal{L}(V)$ para $\mathcal{L}(V, V)$. E quando $W = \mathbb{K}$, chamamos $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ espaço dual de $V$ e o denotamos por $V^*$, seus elementos são transformações lineares de $V$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ que são denominados de funcionais lineares.

**Definição 38** *Dizemos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é um **isomorfismo** se $T$ é bijetora.*

Notemos que $T$ é um isormofismo se, somente se, existe uma aplicação inversa $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$, tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ e $T^{-1} \circ T = I_V$. Percebamos ainda que $T^{-1}$ é um isomorfismo com $(T^{-1})^{-1} = T$. Além disso, se $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $S \in \mathcal{L}(W, U)$ são isomorfismos, então $S \circ T : V \to U$ é um isomorfismo com $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.
Esta definição nos conduz de maneira natural a outra.

**Definição 39** *Se existe um isomorfismo $T : V \to W$, então dizemos que esses $V$ e $W$ são **isomorfos** e denotamos por $V \cong W$.*

Vamos agora verificar como se dar a representação matricial de um transformação linear. Fixemos as bases ordenadas $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ de $V$ e $\beta = \{w_1, ..., w_m\}$ de $W$. Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$, podemos escrever

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \text{ com } j = 1, ..., n, \text{ e } a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Então temos a matriz

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = (a_{ij}), \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

**Definição 40** *Esta matriz assim obtida é chamada* ***matriz de $T$ em relação às bases $\alpha$ e $\beta$****.*

Sabemos que dado $v \in V$, escrevemos $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, onde os escalares $a_1, ..., a_n$ são as coordenadas de $v$ em relação à base $\alpha$ e podemos utilizar a seguinte notação

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Podemos interpretar a matriz $[T]^\alpha_\beta$ como a matriz $m \times n$ cuja j-ésima coluna corresponde $[T(v_j)]_\beta$ e podemos representar a transformação linear $T$ por esta matriz, observando que

$$[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta [v]_\alpha.$$

**Exemplo 35** *Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{$polinômios com grau até 3 com coeficientes reais$\}$. Considere o operador linear $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ dada pela derivação $D(p(x)) = p'(x)$. A matriz de $D$ com relação a base canônica $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $V$ é*

$$[D]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 11** *Se $dimV = n$ e $dimW = m$, então $\mathcal{L}(V, W) \cong M_{\mathbb{K}}(m, n)$.*

**Demonstração:** Fixemos as bases ordenadas $\alpha \subset V$ e $\beta \subset W$ e definamos

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{(\alpha,\beta)}: & \mathcal{L}(V,W) & \to & M_{\mathbb{R}}(m,n) \\ & T & \mapsto & [T]^\alpha_\beta. \end{array}$$

Verificamos que $\varphi_{(\alpha,\beta)} \in (\mathcal{L}(V, W), M_{\mathbb{R}}(m, n))$ e que é um isomorfismo com inversa

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}_{(\alpha,\beta}: & M_{\mathbb{R}}(m,n) & \to & \mathcal{L}(V,W) \\ & A & \mapsto & S_A, \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccc} S_A: & V & \to & W \\ & [S_A(v_j)]_\beta & = & A[v_j]_\alpha, \end{array}$$

para $v_j \in V$ e $j = 1, ..., n$.

**Teorema 12** *Sejam $V, W$ espaços vetoriais , com $dimV = dimW$ e $T \in \mathcal{L}(V, M)$, então são equivalentes:*

1. *$T$ é um isomorfismo;*

2. *$T$ é injetiva;*

3. *$T$ é sobrejetiva;*

4. *$T$ leva base de $V$ em base de $W$.*

**Demonstração:**

(1) $\Rightarrow$ (2) Segue da definição de isomorfismo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supondo $T$ injetiva $\Rightarrow N(T) = \{0_V\} \Rightarrow dimN(T) = 0$ e pelo teorema do núcleo e imagem temos que $dimIm(T) = dim(V) = dimW$ e como $Im(T) \subset W$ temos que $Im(T) = W$, portanto, $T$ é sobrejetiva.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja $T$ sobrejetora $\Rightarrow dimIm(T) = dimW = dimV \Rightarrow dimN(T) = 0 \Rightarrow N(T) = \{0_V\} \Rightarrow T$ é injetiva e dessa forma um isomorfismo.
(3) $\Leftrightarrow$ (2) Utilizemos o fato de $dimV = dimW$ associado à proposição (6).

É importante notarmos que a hipótese de finitude das dimensões de tais espaços é crucial para obter esse resultado. Consideremos $\mathbb{R}^{\infty} = \{(x_1, ..., x_i, ...); x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$ e seu subespaço $\mathbb{R}^{(\infty)} = \{(x_1, ..., x_i, ...); x_i \neq 0$ para uma quantidade finita de $i's\}$.

Como sabemos que combinações lineares são sempre finitas, percebamos que

$$\{e_i = (0, 0, ..., 1, 0, 0, ...), \text{onde 1 ocupa a i-ésima coordenada para } i \in \mathbb{N}\}$$

é uma base para $\mathbb{R}^{(\infty)}$, logo $dim\mathbb{R}^{(\infty)} = \infty$ e segue que $dim\mathbb{R}^{\infty} = \infty$.
Agora definamos $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\infty})$ por

$$T(x_1, ..., x_i, ...) = (0, x_1, ..., x_i, ...)$$
$$S(x_1, ..., x_i, ...) = (x_2, ..., x_i, ...)$$

Notemos que $T$ é injetiva, mas não é sobrejetiva e $S$ é sobrejetiva, mas não e é injetiva, comprovando que o teorema acima não é válido quando dimensão do espaço vetorial não é finita.

**Teorema 13** *Sejam $V, W$ espaços vetoriais, então $V \cong W se, esomentese, dimV = dimW$.*

**Demonstração:**
($\Rightarrow$) Supondo que $V \cong W$, então existe um isomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ e como $\varphi$ é injetiva, então $dimV = dimIm(\varphi) \leq dimW$. Analogamente, considerando o isomorfismo $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$, chegamos a $dimW \leq dimV$. E, portanto, temos $dimV = dimW$.

($\Leftarrow$) Supondo que $dimV = dimW$, tomemos as bases $\alpha = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ e $\beta = \{w_1, ..., w_n\} \subset W$. Definamos a transformação linear

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \rightarrow & W \\ & v & \mapsto & \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \end{array}$$

onde $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$. Então fazendo $\varphi(v_i) = w_i$ para $i = 1, ..., n$, percebemos que $\varphi$ leva base de $V$ em base de $W$, e, pontanto, é um isomorfismo.

**Corolário 6** *Sejam $V, W$ espaços vetoriais tais que $dimV = n$ e $dimW = m$, então $\mathcal{L}(V, M) \cong \mathbb{R}^{mn}$.*

**Demonstração:**

Utilizando que $\mathcal{L}(V, W) \cong M_{\mathbb{K}}(m, n)$ segue que $dimL(V, W) = mn$, como $dim\mathbb{K}^{mn} = mn$, pelo teorema acima o resultado segue.

**Corolário 7** *$dimV^* = dimV$.*

## 4.3 Produto Interno

Através desses resultados podemos obter diversas outros associando um espaço vetorial à representação matricial de uma transformação linear, utilizando por exemplo conceitos de auto-valores, polinômio característico associados a uma transformação linear. No entanto, vamos nos limitar a explorar a partir de agora espaços vetoriais com produto interno para não fugirmos de nosso objetivo.

**Definição 41** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um* ***produto interno*** *é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que, para todo $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ satisfaz:*

1. *$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;*
2. *$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$;*
3. *$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;*
4. *Para todo $v \in V$ e $v \neq 0_V$ temos $\langle v, v \rangle \geq 0$.*

Decorrem diretamente da definição as seguintes propriedades:

1. $\langle 0_V, v \rangle = 0$, para todo $v \in V$;
2. $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0_V$;
3. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ para qualquer $u, v, w \in V$;
4. $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$ com $v, u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;
5. $\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \overline{b_j} \langle u_i, v_j \rangle$, com $u_i, v_j \in V$ e com $a_i, b_j \in \mathbb{K}$ para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

Mostraremos alguns exemplos de espaços vetoriais munidos de um produto interno.

**Exemplo 36** *Para $\mathbb{K}^n$ temos o produto interno canônico dado por*

$$\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

*com* $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$.

**Exemplo 37** *Seja $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$ o espaço das funções contínuas definidas do intervalo $[0,1]$ no corpo $\mathbb{K}$. Tomando $f, g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$, obtemos um produto interno definido por*

$$\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

**Exemplo 38** *Considerando o espaço vetorial $M_{\mathbb{K}}(n,n)$ das matrizes quadradas de ordem $n$ com entradas em $\mathbb{K}$, tomando $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ em $M_{\mathbb{K}}(n,n)$, podemos munir esse espaço com o produto interno definido como o traço da $A\overline{B}^T$,*

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{b_{ji}}$$

*denotado por $tr(A\overline{B}^T)$, onde $\overline{B}^T$ é a matriz transpostas conjugada da matriz $B$, ou seja, $\overline{B}^T = (\overline{b_{ji}})$.*

**Definição 42** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ uma função $||.|| : V \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $v, u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:*

1. $||v|| \geq 0$, *com a igualdade se, e somente se,* $v = 0_V$;
2. $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$;
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Um espaço vetorial munido de um norma é denominado **espaço vetorial normado.**

Se $V$ é um espaço vetorial munido de um produto interno, então a lei $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ define uma norma em $V$. No entanto, vale salientar que nem toda norma provem de um produto interno. Por exemplo, no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, consideremos a norma $||(x,y)||_{\max} = \max\{|x|, |y|\}$ que não se origina de um produto interno.

Mostraremos agora algumas propriedades de uma norma provenientes de um produto interno, quando estamos trabalhando com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. (**Identidade de poralização**) Sejam $u, v \in V$ então $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}||u+v||^2 + \frac{1}{4}||u-v||^2$.

   **Demonstração:**

   Desenvolvendo

   $||u + v||^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u + v, u \rangle + \langle u + v, v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$

$$= ||u||^2 + \langle v, u\rangle + \langle u, v\rangle + ||v||^2$$

e

$$||u-v||^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u-v, u\rangle - \langle u+v, v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle v, u\rangle - \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle$$

$$= ||u||^2 - \langle v, u\rangle - \langle u, v\rangle + ||v||^2,$$

daí

$$||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 2\langle v, u\rangle + 2\langle u, v\rangle$$

como estamos trabalhando sobre $\mathbb{R}$, temos que $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ e, portanto,

$$||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4\langle v, u\rangle$$

e o resultado segue.

2. (**Desigualdade de Cauchy-Schuarz**) Sejam $u, v \in V$, então

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||,$$

A igualdade vale se e somente se $\{u, v\}$ é L.D.

**Demonstração:**
Tomemos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$ temos

$$\langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle = \alpha^2 ||u||^2 - 2\alpha\beta\langle u, v\rangle + \beta^2 ||v||.$$

Tomemos $\alpha = ||v||^2$ e $\beta = \langle u, v\rangle$, segue que

$$0 \leq \langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle = ||u||^2||v||^4 - 2||v||^2|\langle u, v\rangle| + |\langle u, v\rangle|||v||^2 = ||v||^2(||u||^2||v||^2 - |\langle u, v\rangle|).$$

Como $||v||^2 \geq 0$, verificamos que

$$||u||^2||v||^2 - |\langle u, v\rangle| \geq 0$$

ou

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Suponha agora que

$$|\langle u, v\rangle| = ||u|| \cdot ||v||.$$

Usando o cálculo acima termos que $\langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle = 0$, quando $\alpha = ||v||^2$ e $\beta = \langle u, v\rangle$, o que implica $\alpha u - \beta v = 0_V$ e, portanto, $\alpha u = \beta v$ . Se $v = 0_V$ então o conjunto $\{u, v\}$ é claramente L.D. Supondo, agora, que $v \neq 0_V$, logo $\alpha \neq 0$ e daí $u = \frac{\beta}{\alpha} v$, e segue que $\{u, v\}$ é L.D.
Agora, supondo que $\{u, v\}$ é L.D., então existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. Assim,

$$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda|||v||^2 = |\lambda|||v|| \cdot ||v|| = ||u|| \cdot ||v||.$$

Notemos que

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{||u||||v||} \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\langle u, v\rangle}{||u||||v||}\right| \leq 1.$$

De modo que podemos estabelecer uma bijeção entre $[0, \pi]$ com $-1 \leq \frac{|\langle u,v\rangle|}{||u||||v||} \leq 1$. Motivando a seguinte definição:

**Definição 43** *Seja $V$ um espaço vetorial munido com o produto interno, o* ***ângulo*** *$\theta \in [0, \pi]$* ***entre*** *$u, v \in V$ se estabelece por:*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{||u||||v||}\right).$$

Esta definição consiste em uma generalização a dada no contexto da Geometria Analítica, pois aqui os vetores não são apenas segmentos orientados. Dependendo do espaço vetorial podemos considerar ângulos entre matrizes, polinômios ou funções. Portanto percebemos que aqui ocorre uma exemplificação de onde se aplica a transposição didática que é um fato comum, quando estamos trabalhando com o ensino de Matemática.

**Definição 44** *Sejam $V$ um espaço vetorial munido de um produto interno e $u, v \in V$. Dizemos que $u$ e $v$ são* ***ortogonais*** *se e, somente se, $\langle u, v\rangle = 0$.*

**Um subconjunto** $S \subset V$ **é dito ortogonal** se $u$ e $v$ são ortogonais sempre que $u, v \in S$ com $u \neq v$. E dizemos que $S$ é **ortonormal** quando $S$ é ortogonal e $\|v\| = 1$ para $v \in S$.

**Exemplo 39** *Seja $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{K}^n$. $\beta$ em relação ao produto interno canônico de $\mathbb{K}^n$ é ortonormal.*

**Exemplo 40** $\{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ *é ortogonal em relação a*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg dx.$$

Destacamos nos exemplos acima que propriedade de ortogonalidade de um subconjunto de espaço vetorial é estritamente relacionado com o produto interno do espaço vetorial, em outras palavras, um conjunto ortogonal em relação a um produto interno pode não gozar dessa propriedade com relação a outro produto interno considerado.

**Proposição 8** *Sejam $V$ um espaço vetorial com produto interno e um subconjunto $S = \{v_1, ..., v_n\}$ ortogonal de vetores não nulos, daí*

1. *Se $v \in [v_1, ..., v_n]$, então $v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i\rangle}{||v_i||^2} v_i$;*
2. *$S$ é L.I.*

**Demonstração:**

(1) Seja $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \in [v_1, ..., v_n]$, temos que

$$\langle v, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j, v_i \rangle.$$

Como $S$ é ortogonal segue que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ quando $i \neq j$, então

$$\langle v, v_i \rangle = a_j \langle v_i, v_i \rangle = a_i ||v_i||^2.$$

Daí, $a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{||v_i||^2}$, e o resultado segue.

(2) Aplicando (1) com $v = 0_V$, temos

$$0_v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle 0, v_i \rangle}{||v_i||^2} v_i,$$

logo $a_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$ e, portanto, $S$ é L.I.

**Teorema 14** *Seja $V$ um espaço vetorial normado munido de um produto interno com $dimV = n$, então $V$ possui uma base ortogonal.*

**Demonstração:**
Tomemos $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de $V$. Definamos

$$\begin{cases} w_1 & = & v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_m & = & v_m & - & \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle v_m, w_j \rangle}{||w_j||^2} w_j. \end{cases}$$

com $m = 2, ..., n$.

Observemos que

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2} \langle w_1, w_1 \rangle = 0.$$

Procedendo dessa forma, concluímos que $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ quando $i \neq j$. Portanto, $\{w_1, ..., w_n\}$ é ortogonal e pela proposição anterior é L.I., segue que é uma base ortogonal para $V$. Para obter a base ortonormal, basta tomar $\{u_1, ..., u_n\}$, onde $u_i = \frac{w_i}{||w_i||}$ para $i = 1, ..., n$.

Esse processo demostrado acima é conhecido como **processo de ortogonalização de Gram- Schmidt**.

**Definição 45** *Sejam $V$ um espaço vetorial normado munido de um produto interno e $S \subset V$ um subconjunto não-vazio. O conjunto*

$$S^{\perp}_{\langle , \rangle} = S^{\perp} = \{v, \in V; \langle v, u \rangle = 0 \forall u \in S\}$$

*é dito* ***complemento ortogonal de*** *$S$ com relação a $\langle , \rangle$.*

Observemos que $S^{\perp} \subset V$ é um subespaço vetorial de $V$ e se $S = W$ um subespaço de $V$, temos que $v \in W^{\perp} \Leftrightarrow \langle v, v_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, ..., n$, com $W = [w_1, ..., w_n]$.

**Proposição 9** *Sejam $V$ um espaço vetorial normado munido de um produto interno e $W$ um subespaço de $V$, então $V = W \oplus W^{\perp}$.*

**Demonstração:**

Tomemos $\{w_1, ..., w_r\}$ uma base ortogonal de $W$, que pode ser completada a uma base ortogonal de $V, \beta = \{w_1, ..., w_r, w_{r+1}, ..., w_n\}$, de modo que dado $v \in V$ podemos escrever

$$v = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i + \sum_{j=r+1}^{n} a_j w_j$$

onde $w = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i$ e $u = \sum_{j=r+1}^{n} a_j w_j$. Mostremos que $u \in W^{\perp}$. Pela que observamos devemos ter $\langle u, w_i \rangle = 0$, para $i = 1, ..., r$. De fato,

$$\langle u, w_i \rangle = \langle \sum_{j=r+1}^{n} a_j w_j, w_i \rangle = \sum_{j=r+1}^{n} a_j \langle w_j, w_i \rangle = 0,$$

pois $\beta$ é uma base ortogonal de $V$.

Temos também que $W \cap W^{\perp} = \{0_V\}$, pois se $v \in W \cap W^{\perp}$, então $\langle v, v \rangle = 0$. Logo $v = 0_V$. E portanto o resultado segue.

**Teorema 15** ***(Teorema da representação de Riesz)***
*Sejam $V$ um espaço vetorial normado munido de um produto interno e $f \in V^*$, então existe um único $w \in V$ tal que $f(v) = f_w(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$.*

**Demonstração:**
Tomemos $f \in V^*$ e $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ortonormal de $V$, desse modo para $v \in V$, temos

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i,$$

com

$$a_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{||u_i||^2} = \langle v, u_i \rangle.$$

Logo

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i,$$

Aplicando $f$, obtemos

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, \overline{f(u_i)} u_i \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^{n} \overline{f(u_i)} u_i \rangle.$$

Definamos $w = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(u_i)} u_i$ e obtemos $f(v) = f_w(v) = \langle v, w \rangle$, para todo $v \in V$.

Agora mostremos a unicidade de $w$.
Supondo que exista $w' \in V$ de modo que $f(v) = f_{w'}(v) = \langle v, w' \rangle$ para todo $v \in V$. Assim,

$$\langle v, w \rangle = \langle v, w' \rangle \Rightarrow \langle v, w - w' \rangle = 0,$$

para todo $v \in V$, e portanto $w - w' = 0_V \Rightarrow w = w'$.

Como queríamos.

Estes conceitos generalizam definições vistas no capítulo sobre Geometria Analítica, mostrando a gradação entre o conceito de produto interno que pode ser visualizado atribuindo características geométricas. Podendo ser concretizadas materialmente no espaço euclidiano em que vivemos. Já no contexto da Álgebra Linear este conceito é estendido e da mesma forma atribui características geométricas ao espaço estudado, não necessariamente pode ser visualizado concretamente, pois agora podemos nos encontrar em um espaço com dimensão maior que 3.

# Capítulo 5

# Análise Funcional

A Análise Funcional surgiu no início do século XX, trazendo o amadurecimento de certos conceitos, como convergência e continuidade em objetos mais abstratos que números. Nesse período, a caracterização de duais (espaços de funcionais lineares contínuos) favoreceu o surgimento de alguns conceitos que foram formalizados em linguagem moderna com o livro de Banach em 1932. A partir de então a Análise Funcional evoluiu bastante e tem se estendido ao estudos de espaços vetoriais, não necessariamente normandos.

A Análise Funcional é o ramo da Matemática, e mais especificamente da Análise, que trata do estudo de espaços de funções. A palavra funcional remonta ao cálculo de variações, implicando uma função cujo argumento é também uma função. A Análise Funcional desempenha uma importante ferramenta em ciências aplicadas, como na própria Matemática. Em particular, possui um papel importante em Equações Diferenciais Parciais.

Esta área está intimamente ligada à teoria dos Espaços Métricos. O termo métrico' é derivado de *metor* (medida). O conceito de Espaço Métrico é essencialmente devido a um matemático francês M. Fréchet, que introduziu esta noção em sua tese de doutorado (Univesité de Paris, 1906). No entanto, a definição presente em uso foi dada pelo matemático alemão F. Hausdoff em 1914 e o estudo preliminar desse tema faz-se necessário para um aprofundamento diante de conceitos fundamentais da Análise Funcional.

## 5.1 Espaços métricos

**Definição 46** *Uma **métrica** num conjunto $M$ é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par de elemento $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a **distância** de $x$ a $y$, satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$.*

1. $d(x, x) = 0$;
2. *Se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

**Definição 47** *Um **espaço métrico** é um par $(M, d)$ onde $M$ é um conjunto e $d$ é uma métrica em $M$.*

**Exemplo 41** *Um espaço vetorial normando $V$, torna-se um espaço métrico com a métrica induzida pela norma dada por*

$$d(x, y) = ||x - y||, \forall x, y \in V.$$

**Exemplo 42** *Podemos observar que o $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ de dimensão $n$ que pode ser munido da seguinte métrica:*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

*Esta é denominada a métrica euclidiana, que para efeitos geométricos é a mais usual. Porém, podemos munir o $\mathbb{R}^n$ com outras métricas como*

$$d(x, y)_M = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

$$d(x, y)_S = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

As métricas determinam uma distância em um espaço métrico, assim podemos obter conjuntos oriundos dessa métrica.

**Definição 48** *Dado $(M, d)$ um espaço métrico definimos*

- *A **bola aberta** de centro $x_0 \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$*

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) = \{x \in M; d(x, x_0) < r\};$$

- *A **bola fechada** de centro $x_0 \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$*

$$B[x_0, r] = \overline{B_r(x_0)} = B_r(x_0) = \{x \in M; d(x, x_0) \leq r\};$$

- *A **esfera de centro** $x_0 \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$*

$$S(x_0, r) = S_r(x_0) = \{x \in M; d(x, x_0) = r\}.$$

**Definição 49** *Dado $(M, d)$ um espaço métrico, uma sequência em $M$ é uma função $\mathfrak{X}$ com domínio em $\mathbb{N}$ e contradomíno em $M$, denotada por $(x_k)$ com $k \in \mathbb{N}$.*

A partir desse conceito obtemos diversos outros.

- Uma subsequência de $(x_k)$ é uma restrição da função $\mathfrak{X}$ a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$;
- Uma sequência é dita limitada quando, existe $r > 0$, tal que $x_k \in B[0, r], \forall k \in \mathbb{N}$;
- Uma sequência $(x_k) \in M$ converge para $a \in M$ quando $\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B_\epsilon(a) \forall k \geq k_0$, denotamos $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$ e dizemos que $a$ é limite de $(x_k)$;

- Uma sequência é dita de Cauchy quando $\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x_m) < \epsilon \forall k, m \geq k_0$;
- Um espaço métrico é dito completo quando toda sequência de Cauchy converge para um elemento desse espaço.

Estas definições nos fornecem subsídios para definir conceitos básicos topológicos de $M$.

**Definição 50** *Seja $X \subseteq M$. Dizemos que $a \in M$ é um **ponto interior** de $X$, quando $\exists r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq X$. Ao conjunto de todos os pontos interiores de $X$ denotamos por $intX$ e dizemos que **um conjunto $X$ é aberto** quando $X = intX$.*

**Definição 51** *Sejam $X \subseteq M$ e $a \in M$, $a$ é dito **ponto aderente** de $X$, quando $a$ é limite de alguma sequência de elementos de $X$. Ao conjunto de todos os pontos aderentes de $X$, chamamos de fecho de $X$ e denotamo-no por $\overline{X}$. **Um conjunto $X$ é dito fechado** quando $X = \overline{X}$.*

**Definição 52** *Sejam $X \subseteq M$ e $a \in M$, dizemos que $a$ é **ponto de acumulação** de $X$, quando para todo $\epsilon > 0, B_\epsilon(a) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de $X$ denotamos por $X'$. Quando um ponto não é de acumulação é dito isolado.*

**Definição 53** *Um **conjunto** $X \subseteq M$ **é dito compacto** quando toda cobertura aberta de $X$ admite uma subcobertura finita, isto é, se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$, com $A_\lambda$ aberto $\forall \lambda \in L$ é tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A$, então existem $A_1, ..., A_k$ abertos de $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$*

**Definição 54** *Um subconjunto $X$ de um espaço vetorial é dito **convexo** quando dados $a, b \in X$, então $[a, b] = \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subset X$.*

Uma outra definição muito útil para os resultados que pretendemos obter em relação à Análise Funcional corresponde a continuidade das aplicações.

**Definição 55** *Sejam $M, N$ espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é **contínua em** $a \in M$, quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, então temos $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Dizemos que $f$ **é contínua** quando é contínua em todos os pontos de $M$.*

**Exemplo 43** *Dado $V$ um espaço vetorial normado. Temos que a norma $\|.\| : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. De fato, utilizando a desigualdade*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

*Então, dados $x, y \in V$ e $\epsilon > 0$, quando $\|x - y\| < \epsilon$, temos que existe $\delta = \epsilon > 0$ de modo que $|\|x\| - \|y\|| < \delta$.*

**Definição 56** *Sejam $M, N$ espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é **uniformemente contínua**, quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ com $d(x, y) < \delta$, então temos $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Observemos que algumas das definições expostas nesta seção caracterizam generalições do conceito de limite apresentado no Capítulo 2. Destacamos ainda que a notação usada aqui difere da utilizada no Capítulo 2, uma vez que esta é mais apropriada para antender a generalidade dos Espaços Métricos.

## 5.2 Espaço de Banach

Agora passamos a um conceito básico nos estudos de Análise Funcional.

**Definição 57** *Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial normado completo denominamo-o de **espaço de Banach**.*

**Exemplo 44** *$\mathbb{R}$ é um espaço de Banach de dimensão finita.*

**Exemplo 45** ***O espaço das sequências** $\ell^p$, com $1 \leqslant p < \infty$, onde $\ell^p$ denota o conjunto de todas as sequências $x = \{x_j\}$ em $\mathbb{K}$, tal que a série $\sum |x_i|^p$ converge, ou seja, $\sum |x_i|^p < \infty$. Definindo as operações lineares usuais, facilmente provamos que $\ell^p$ é um espaço vetorial. Mais do que isto, equipado com a norma dada por*

$$\|x\|_{\ell^p} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad x = \{x_i\} \in \ell^p$$

*é um espaço de Banach de dimensão infinita.*

**Exemplo 46** ***O espaço das sequências** $\ell^\infty$, onde $\ell^\infty$ denota o conjunto de todas as sequências limitadas em $\mathbb{K}$ equipada da norma dada por*

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |x_i|, \quad x = \{x_i\} \in \ell^\infty$$

*é um espaço de Banach de dimensão infinita.*

**Exemplo 47 Um Espaço Normado que não é Banach**. *Seja $\mathcal{C}([0,1])$ é um espaço vetorial. Entretanto, $\mathcal{C}([0,1])$ equipado com a norma dada por*

$$\|f\|_R = \int_0^1 |f(x)| dx \tag{5.1}$$

*não é um espaço de Banach. Pois tomemos a sequência de funções*

$$f_n(x) = 1 - x^n$$

*que converge para*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1; \\ 1, & x \in 0 \leq x < 1; \end{cases}$$

*que não é um elemento de $\mathcal{C}([0,1])$.*

## 5.3 Aplicações Lineares

Aqui podemos aplicar os conceitos topológicos e de continuidade às aplicações lineares. Podemos mesmo definir uma aplicação linear através de limite de sequência.

**Exemplo 48** *Seja $A$ o espaço das sequências convergentes e $x = (x_n) \in A$, definamos $f(x) = \lim x_n$.*

*Observemos que para $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos*

$$f(x + \lambda y) = \lim(x_n + \lambda y_n) = \lim x_n + \lambda \lim y_n = f(x) + \lambda f(y).$$

*Portanto, $f$ é um funcional linear em $A$ já que linearidade é obtida através de propriedades de limites de sequências.*

**Definição 58** *Um operador linear $T : E \to F$ é dito* **limitado** *se existe uma constante $M$ tal que*

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in E. \tag{5.2}$$

**Teorema 16** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador linear. Então*

1. *se $T$ é contínua na origem, então $T$ é uniformemente contínua em $E$;*
2. *o operador $T$ é contínuo em $E$ se, e somente se $T$ é limitado.*

**Demonstração:**

**1.** Como $T$ é contínua no zero, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - 0\| < \delta$ implicando que $\|T(x) - 0\| < \frac{\epsilon}{2}$, isto é, $\|T(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$, sempre que $\|x\| < \delta$. Sendo $\|x - y\| < \delta$, então

$$\|T(x - y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leq \|T(x)\| + \|T(y)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Então, $T$ é uniformemente contínua.

**2.** Suponhamos que $T$ seja limitado, então existe uma constante $M$ tal que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, consideremos $\|x - y\| < \delta = \frac{\epsilon}{M}$, temos que

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| < M\|x - y\| < M\delta = \epsilon.$$

Logo, $T$ é contínua.

Reciprocamente, suponhamos $T$ contínua, então $T$ é contínua na origem. Seja $\delta = \delta(1)$ tal que $\|T(y)\| < 1$ sempre que $\|y\| < \delta$.

Tome $x \neq 0$, temos $y = \frac{\delta x}{2\|x\|}$, e $\|y\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, logo

$$\left\| T\Big(\frac{\delta x}{2\|x\|}\Big) \right\| < 1,$$

e,

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x\|} T(x) \right\| = \left| \frac{\delta}{2\|x\|} \right| \ \|T(x)\| < 1,$$

ou seja,

$$\frac{\delta}{2\|x\|}\|T(x)\| < 1,$$

portanto,

$$\|T(x)\| < \frac{2}{\delta}\|x\|.$$

Sendo $M = \frac{2}{\delta}$, $T$ é limitada.

**Exemplo 49** *Embora aplicações lineares em espaços vetoriais normados de dimensão finita sejam sempre contínuas, o mesmo não vale para espaços vetoriais de dimensão infinita. De fato, se $E$ é um espaço vetorial normado de dimensão infinita e $F$ é um espaço vetorial normado de dimensão maior ou igual a 1, podemos sempre construir uma aplicação linear $T : E \to F$ que não é limitada. Para isso, seja $\beta$ uma base para $E$, $\beta' \subset \beta$ um subconjunto enumerável de vetores e $y \in F$ um vetor não nulo qualquer. Definimos uma aplicação linear $T : E \to F$ definindo $T$ em $\beta$ por*

$$T(x_n) = n\|x_n\|y, \text{ se } x_n \in \beta'$$

*e*

$$T(x) = 0, \text{ se } x \in \beta\backslash\beta'.$$

*$T$ não limitada, pois*

$$\|T(x_n)\| = n\|y\|\|x_n\|,$$

*logo não existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\|T(x_n)\| \leq M\|x_n\|.$$

*Em particular, vemos que se $E$ é um espaço vetorial normado de dimensão infinita, sempre existem funcionais lineares que não são contínuos, pois podemos tomar $F = \mathbb{R}$.*

**Definição 59** *Se $E$ e $F$ são espaços vetoriais normados, denotaremos o espaço vetorial das aplicações lineares limitadas por $\mathcal{L}(E, F)$. Definimos a norma de uma aplicação linear limitada por*

$$\|T\| = \inf\{M \in \mathbb{R}; \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in E\}.$$

**Proposição 10** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ uma aplicação linear limitada. Então,*

$$\|T\| = \sup_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

**Demonstração:**

Para $x \neq 0$, seja

$$K = \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Então, $\|Tx\| \leq K\|x\|$ para todo $x \in E$. Logo $K \geq \|T\|$. Reciprocamente, como por definição $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in E$, segue que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$$

para todo $x \in E\backslash\{0\}$, logo $\|T\| \geq K$. Isso prova a primeira identidade. Para provar que

$$\sup_{x \in E\backslash\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|,$$

basta notar que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|.$$

**Proposição 11** *Se $E$ e $F$ são espaços vetoriais normados, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial normado.*

**Demonstração:**

Sejam $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$. Temos

$$\|(T + S)(x)\| = \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|$$

para todo $x \in E$, de modo que obtemos simultaneamente que $T + S \in \mathcal{L}(E, F)$ e a validade da desigualdade triangular para a norma de aplicações lineares.

**Proposição 12** *Se $E$ é um espaço vetorial normado e $F$ é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach.*

**Demonstração:**

Seja $(T_n)$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$, então temos

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \to 0, \text{ com } m, n \to \infty,$$

implicando que $(T_m(x))$ é uma sequência de Cauchy em $F$. Lembre-se que, por hipótese, $F$ é um espaço de Banach, logo existe $\lim T_m(x) = T(x)$, para cada $x \in E$. Já que $T_m$ é um operador linear para cada $m$, temos

$$T_m(\lambda x + \mu x') = \lambda T_m(x) + \mu T_m(x'), \text{ para cada } x, x' \in E, \text{ e } \lambda, \mu \text{ escalares.}$$

Fazendo $m \to \infty$ nessa última equação, vemos que $T(\lambda x + \mu x') = \lambda T(x) + \mu T(x')$, ou seja, $T(x)$ é linear para cada $x$ em $X$. Nosso objetivo agora é mostrar que $(T_n)$ converge para $T$ e que $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Seja $\epsilon > 0$. Já que $(T_n)$ é uma sequência de Cauchy, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon, \forall n, m \geq N$. Como

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \epsilon\|x\|,$$

podemos fazer $m \to \infty$ e obter

$$\|T_n - T\| < \epsilon, \forall n \geq N.$$

Isto é o suficiente para mostrar que $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Para tanto, escolha $\epsilon = 1$ na desigualdade acima e tome seu correspondente $N = N(1)$. Então,

$$\|T_n(x)\| = \|T_n(x) - T_N(x) + T_N(x)\| \leq \|T_n(x) - T_N(x)\| + \|T_N(x)\| \leq$$

$$\leq \|T_n - T_N\|\|x\| + \|T_N(x)\| \leq 1 \cdot \|x\| + \|T_N(x)\|.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos $\|T(x)\| \leq \|T_N(x)\| + \|x\|$, para qualquer $x$ em $E$. Concluímos que $T$ é limitado, donde $T \in \mathcal{L}(E, F)$, o que completa a demonstração.

**Definição 60** *Se $E$ é um espaço vetorial normado, denotaremos o espaço vetorial dos funcionais lineares limitados por $E^*$. Ele é chamado o* **espaço dual** *de $E$.*

**Corolário 8** *Se $E$ é um espaço vetorial normado, então $E^*$ é um espaço de Banach.*

**Demonstração:** O resultado se dá usando $F = \mathbb{R}$ na Proposição 12.

**Definição 61** *Sejam $E$ e $F$ espaço vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação $T : E \to F$ é* **limitada inferiormente** *se existe uma constante $m > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \geq m\|x\|$$

*para todo $x \in E$.*

**Proposição 13** *Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então a inversa $T^{-1} : Im(T) \to E$ existe, é linear e limitada se, e somente se $T$ é limitada inferiormente.*

**Demonstração:**

Suponha que $T$ é limitada inferiormente. Então, se $x \neq y$ segue que

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \geq m\|x - y\| > 0,$$

logo $T$ é injetiva e portanto a inversa $T^{-1} : Im(T) \to E$ está bem definida. Como $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$, tomando $T^{-1}$ em ambos os lados desta equação, segue também que

$$T^{-1}(\alpha Tx + \beta Ty) = \alpha x + \beta y = \alpha T^{-1}(Tx) + \beta T^{-1}(Ty),$$

logo $T^{-1}$ é linear. Finalmente,

$$\|T^{-1}(Tx)\| = \|x\| \leq m^{-1}\|Tx\|$$

para todo $y = Tx \in Im(T)$ e, portanto $T^{-1}$ é limitada. Reciprocamente, suponha que $T^{-1} : Im(T) \to E$ existe, é linear e limitada. Então,

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$$

para todo $x \in E$, ou seja,

$$\|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|.$$

Tome $m = \|T^{-1}\|^{-1}$ e o resultado segue.

**Definição 62** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais normados. Dizemos que $E$ e $F$ são* **topologicamente isomorfos** *quando existe uma aplicação linear bijetiva $T : E \to F$ tal que $T$ e $T^{-1}$ são limitadas.*

**Corolário 9** *$T : E \to F$ é um isomorfismo topológico entre os espaços vetoriais normados $E$ e $F$ se, e somente se, existem constantes $m, M > 0$ tais que*

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|.$$

**Demonstração:**
Use a definição de transformação linear limitade e a Proposição 13.

Em particular, isomorfismo topológicos preservam sequências de Cauchy e sequências convergentes. Daí, se $E$ e $F$ são topologicamente isomorfos, então $E$ é um espaço de Banach se, e somente se $F$ o é.

**Proposição 14** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais normados de dimensão finita com a mesma dimensão. Então, $E$ e $F$ são topologicamente isomorfos.*

**Demonstração:**

Como a relação de isomorfismo topológico entre espaços vetoriais normados é uma relação de equivalência, basta mostrar que se $\dim E = n$, então $E$ é topologicamente isomorfo a $\ell^1(n)$. Seja $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para $E$. Considere o isomorfismo $T : \ell^1(n) \to E$ definido por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Afirmamos que $T$ é um isomorfismo topológico. De fato, $T$ é limitada porque

$$\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|e_i\| \leq \left(\max_{i=1,\ldots,n} \|e_i\|\right) \sum_{i=1}^{n} |x_i| = M\|x\|_{\ell^1(n)}$$

onde denotamos $M = \max_{i=1,\ldots,n} \|e_i\|$. Como $T$ é contínua, a função $x \mapsto \|Tx\|$ também é e assume um valor mínimo $m$ na esfera unitária $B = \{x \in \ell^1(n); \|x\| = 1\}$. Necessariamente $m > 0$, pois $\beta$ é um conjunto linearmente independente. Portanto,

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \geq m$$

para todo $x \in E$, $x \neq 0$, o que mostra que $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$.

**Corolário 10** *Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é de Banach. Todo subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço vetorial normado é fechado.*

**Corolário 11** *Se $E$ é um espaço vetorial normado de dimensão finita e $T : E \to F$ é linear, então $T$ é contínua.*

**Corolário 12** *Se $E$ é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então um subconjunto de $E$ é compacto se, e somente se ele for fechado e limitado. Além disso, se $E$ é um espaço vetorial normado tal que a bola unitária é compacta, então $E$ possui dimensão finita.*

## 5.4 Bases

Na álgebra linear, quando lidamos apenas com espaços vetoriais, sem as noções topológicas, temos o conceito de base de Hamel. Essa base é, em geral de difícil manuseio, principalmente quando trabalhamos com espaços de dimensões infinitas. O resultado a seguir nos dá uma ideia desse fato.

**Teorema 17** *Seja $E$ um espaço de Banach de dimensão infinita e $\beta$ uma base de $\mathbb{E}$. Então $\beta$ é não-enumerável.*

**Demonstração:** Se $\beta$ fosse enumerável, poderíamos enumerar seus elementos $v_1, v_2, ..., v_n, ...$ e escreveríamos

$$\mathbb{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

onde $F_n$ é o subespaço gerado por $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Como cada $F_n$ tem dimensão finita, segue que são fechados, e pelo Teorema de Baire (Ver Lima, 2007, p.190) sabemos que algum dos $F_n$ tem interior não-vazio. Mas, isso é um absurdo, pois todo subespaço próprio de um espaço vetorial normado tem interior vazio.

**Definição 63** *Se $\mathbb{E}$ é um espaço de Banach, uma sequência $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é* ***uma base de Schauder*** *de $\mathbb{E}$ se cada $x \in \mathbb{E}$ puder ser representado de maneira única como*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \text{ para } x_n \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 50** $c = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}; \lim_{k\to\infty} x_k < \infty\}$
*possui uma base de Schauder $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por*

$$\begin{cases} e_0 &= (1,1,1,...); \\ e_1 &= (1,0,0,...); \\ e_2 &= (0,1,0,...); \\ & \vdots \end{cases}$$

*Com efeito, se $x = (x_1, x_2, ...) \in c$, denotamos $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ temos:*

$$x = x_0 e_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_0) e_j$$

## 5.5 Espaço de Hilbert

**Definição 64** *Dizemos que $H$ é um* **espaço de Hilbert** *se $H$ for um espaço vetorial com produto interno que é um espaço de Banach com a norma derivada do produto interno.*

**Exemplo 51** *$\ell^2(n)$ e $\ell^2$ são espaço de Hilbert.*

**Proposição 15 (Identidade do Paralelogramo)** *Seja $E$ um espaço vetorial com produto interno. Então,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**Demonstração:**

De fato,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle) + (\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

**Teorema 18** *Seja $E$ um espaço vetorial normado, cuja norma $\|.\|$ satisfaz a identidade do paralelogramo, então a identidade polar*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

*define um produto interno em $E$ tal que a sua norma é derivada dele.*

A demonstração desse teorema é bastante simples, apesar de exaustiva. Pode ser encontrada nas Notas de aula do curso Análise Funcional do Programa de Pós-Graduação em Matemática, ministrado no primeiro semestre de 2009, pelo do professor Rodney Josué Biezuner na Universidade Federal de Minas Gerais.

**Corolário 13** *Seja $E$ um espaço vetorial normado. Então a norma de $E$ deriva de um produto interno se, e somente se ela satisfaz a identidade do paralelogramo.*

**Teorema 19 (Vetor que minimiza a distância)** *Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $C \subset H$ um subconjunto convexo fechado não vazio. Para todo $x \in H$ existe um único $y_0 \in C$ tal que*

$$\|x - y_0\| = \min_{y\in C} \|x-y\|.$$

**Demonstração:**

Denote $d = \inf_{y\in C} \|x-y\|$ e seja $(y_n) \subset C$ uma sequência minimizante para a distância, isto é,

$$\|x - y_n\| = d_n \to d.$$

Afirmamos que $(y_n)$ é uma sequência de Cauchy. De fato, pela identidade do paralelogramo, temos

$$\|x - y_n + (x - y_m)\|^2 + \|x - y_n - (x - y_m)\|^2 = 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\right).$$

Como $\dfrac{y_n + y_m}{2} \in C$, pois $C$ é convexo, segue que

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(d_n^2 + d_m^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \leq 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2 \to 0$$

quando $n, m \to \infty$. Como $H$ é completo e $C$ é fechado, podemos tomar $y_0 = \lim y_n \in C$.

Para provar a unicidade, suponha que existam $y_0, \tilde{y_0} \in C$ tais que

$$\|x - y_0\| = \|x - \tilde{y_0}\| = d.$$

Usando a identidade do paralelogramo novamente, temos

$$\|y_0 - \tilde{y_0}\|^2 = 2(d^2 + d^2) - 4\left\|x - \frac{y_0 + \tilde{y_0}}{2}\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0.$$

Como $\|y_0 - \tilde{y_0}\|^2 \leq 0$ segue que$\|y_0 - \tilde{y_0}\|^2 = 0$ e assim $y_0 = \tilde{y_0}$.

**Corolário 14** *Se $H$ é um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado, então para cada $x \in H$ existe um único $y_0 \in L$ satisfazendo*

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in L} \|x - y\|,$$

*obtido no teorema acima tal que*

$$x - y_0 \perp L.$$

**Demonstração:** Provaremos inicialmente que

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$$

para todo $y \in L$.

Seja $t \in [0, 1]$, tomemos $z = (1 - t)y_0 + ty \in L$, portanto,

$$\|x - y_0\| \leq \|x - z\| = \|x - [(1 - t)y_0 + ty]\| = \|x - y_0 - t(y - y_0)\|.$$

Segue que

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|x - y_0\|^2 - 2t\langle x - y_0, y - y_0 \rangle + t^2\|y - y_0\|,$$

e obtemos

$$2\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq t\|y - y_0\|.$$

Fazendo $t \to 0$, verificamos que

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0.$$

Tomando agora $y \in L$ temos para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\langle x - y_0, ty - y_0 \rangle \leq 0,$$

e assim

$$t\langle x - y_0, y \rangle \leq \langle x - y_0, y_0 \rangle.$$

Tomando $t = 0$, temos

$$0 \leq \langle x - y_0, y_0 \rangle.$$

E desssa forma

$$\langle x - y_0, y \rangle = 0.$$

■

**Lema 2** *Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado próprio. Então, existe $z \in H \backslash L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$.*

**Demonstração:**

Pelo teorema anterior, dado $w \in H \backslash L$, existe $y_0 \in L$ tal que $w - y_0 \perp L$. Claramente, $w - y_0 \notin L$, logo podemos tomar

$$z = \frac{w - y_0}{\|w - y_0\|},$$

e o resultado segue.

**Teorema 20 (Teorema de Representação de Riesz)** *Seja $H$ um espaço de Hilbert. Dado $f \in H^*$ existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

*para todo $x \in H$. Além disso,*

$$\|f\|_{H^*} = \|y\|_H.$$

*Em particular, $H^* = H$, no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.*

**Demonstração:** Como $f \in H^*$, temos que $L = \ker f$ é fechado. Seja $L = H$, então $f \equiv 0$ e tomamos $y = 0$. Caso contrário, pelo lema anterior existe $z \in H \backslash L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$. Temos $H = [z] \oplus L$. Mais especificamente, dado $z \in H$ podemos escrever

$$z = \frac{f(x)}{f(z)} z + \left( x - \frac{f(x)}{f(z)} z \right) \tag{5.3}$$

e

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in L.$$

Afirmamos que $y = f(z)z$. De fato, fazendo o produto interno de (5.3) com o vetor $y = f(z)z$ segue que

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)}z + \left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right), f(z)z \right\rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)}z, f(z)z \right\rangle = f(x)\langle z, z \rangle.$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz tem $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$, de modo que $\|f\|_{H^*} \leq \|y\|$ e

$$\|f\|_{H^*} \geq f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \|y\|.$$

**Corolário 15** *Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado. Para todo $x \in H$ o único $y_0 \in L$ tal que*

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in L} \|x - y\|,$$

*dado pelo teorema anterior, satisfaz*

$$x - y_0 \perp L.$$

**Demonstração:**

Para provar a ortogonalidade do vetor $x - y_0$, primeiro mostraremos que

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0, \forall y \in L.$$

Com efeito, para todo $0 \leq t \leq 1$ temos $z = (1-t)y_0 + ty \in L$, logo

$$\|x - y_0\| \leq \|x - [(1-t)y_0 + ty]\| = \|x - y_0 - t(y - y_0)\|,$$

de modo que

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|x - y_0\|^2 - 2t\langle x - y_0, y - y_0 \rangle + t^2\|y - y_0\|^2,$$

donde

$$2\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq t\|y - y_0\|^2.$$

Fazendo $t \to 0$, segue o desejado. Agora, dado $y \in L$, para $t \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\langle x - y_0, ty - y_0 \rangle \leq 0,$$

já que $L$ é um subespaço de $H$. Assim,

$$t\langle x - y_0, y \rangle \leq \langle x - y_0, y_0 \rangle$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica necessariamente que $\langle x - y_0, y_0 \rangle = 0$.

# Referências Bibliográficas


[1] BIEZUNER, Rodney Josué. *Análise Funcional*. Pimeiro semestre de 2009. Notas de aulas. Digitado.

[2] BITAR, Marielena, MUNIZ, Cristiano Alberto. *A aprendizagem Matemática na perpectiva da teoria dos campos conceituais.(org.)* 1.ed. Curitiba: CRV, 2009.

[3] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. [trad.] GOMIDE, Elza F. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[4] BOLDRINI, José Luiz et. al.*Álgebra Linear*. São Paulo: Harbra, 1978.

[5] BREZIS, Haim. *Analyse Fonctionnelle: théorie et applications*. Paris: Masson, 1987.

[6] COELHO, Fávio Ulhoa e LOURENÇO, Mary Lilian.*Um Curso de Álgebra Linear*. 2 ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2007.

[7] COSTA, M. Amoroso. *As idéias Fundamentais da Matemática e outros ensaios*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1971.

[8] DOS SANTOS, Robinson Nelson. *Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes*.São Paulo, 2007

[9] FERNANDES, Elisângela. *O desafio de aprender (REVISTA NOVA ESCOLA) 241*. Ano XXVI. Abril, 2005.($pp90-93$)

[10] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo (Volume 1)*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[11] HOFFIMAN, Kenneth e KUNZE, Ray. *Álgebra Linear*. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

[12] HSU, Hwei P.*Análase Vetorial*[Trad.] DE CERQUEIRA NETO, Egard Pedreira. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1972.

[13] LIMA, Elon Lages et.al. *A matemática do ensino médio - volume 3*. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no Plano*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

[15] LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

[16] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[17] MACHADO, Nílson José. *Matemática e Realidade*. 5 ed. São Paulo: Cortez, 2001.

[18] MIRAS, Mariana et. al. *O construtivismo na sala de aula*. São Paulo: Ática, 1996.

[19] MORAIS Filho, Daniel Coordeiro de.*Manual de Redação Matemática*.1.ed.Campina Grnde, RG, 2009.

[20] MOYSÉS, Lucia Maria. *O desafio de saber ensinar*. 2.ed. Campinas: Papirus, 1995.

[21] PADUÁ, Gelson Luiz Daldegan de. *A epistemoligia genética de Jean Piajet*. Revista FACEVV 22, primeiro semestre 2009 (pp 22-35)

[22] PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

[23] Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática/Ministro da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. 3. Ed. Brasília, 2001.

[24] PROJETO FUNDÃO - IM / UFRJ. *Geometria segundo a teoria de Van Hiele*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000.

[25] PEIXOITO, Roberto.*Elementos de Geometria Analítica*.6 ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1955.

[26] RÊGO, Rômulo Marinho do e RÊGO, Rogéria Gaudêncio do. *Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In:*O laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. LORENZAO, Sergio(org.)2ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

[27] SALVADOR, César Coll et. all. *Psicologia do Ensino*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

[28] Santos, Boaventura de Sousa.*Um discurso sobre as ciências*. 8ed. Porto, Afrontamento, 1996.

[29] SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill,1987.

[30] STEWART, James. *Calculus(trad.)*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

[31] VIGOTSKY, L. S. *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1987.